PICCOLE NOTE

SOLUZIONE RAPIDA DEL PROBLEMA DI SNELLIUS

GEOM. ATTILIO SELVINI

Il « problema dei tre punti » o del « vertice di piramide » od ancora della « determinazione della stazione » o della « intersezione indietro » o « intersezione inversa » è sempre stato di notevole interesse per la Topografia. Come è noto la sua enunciazione è dovuta a Villderbrord Snell (latinamente Snellius) astronomo olandese che ne propose la risoluzione grafica nel 1616. La definizione del problema data da Snellius è la seguente: *trium locorum intervallis inter ze datis, quarti distantiam ab omnibus unica statione definire.*

Dopo lo Snellius molti altri studiosi si occuparono della risoluzione del problema. Ricerche attente, studio ed applicazione costante portarono alla scoperta di parecchi metodi risolutivi di natura geometrica (assai importanti, nei secoli scorsi, dato che i rilevamenti venivano allora effettuati con la tavoletta ideata dal viennese Johannes Richter, al solito latinizzato in Praetorius, professore di geodesia in Altdorf dal 1576 al 1616; donde il nome di « mensula praetoriana » dato allo strumento dall'allievo di Praetorius, Daniel Schwentner). Notevoli, tra queste soluzioni, quelle del Collins (1671), del Pothenot (1692) e, più tardi, dell'Avet (che alcuni confondono con quella di Collins), del Grunert, del Binder, del Lehmann, ecc.

Parecchie furono anche le esposizioni meccaniche escogitate, da quella della carta trasparente alle altre per cui furono costruiti regoli appositi (doppio goniografo di Pott, compasso di Bauerfeind, riportatore di Victor Von Reitzner, « station pointer » dell'inglese Mathis).

La risoluzione analitica più nota, ed è poi quella riportata nei testi scolastici, è del tedesco Burckhardt (1733-1825). Detto procedimento introduce nei calcoli l'angolo ausiliario λ e determina gli angoli X ed Y, noti i quali si completa la risoluzione applicando alla figura (divisa in due triangoli) il teorema dei seni.

Più tardi si preferirono mezzi risolutivi rapidi, che si prestassero al calcolo con le macchine, oltre che all'usuale calcolo logaritmico. Uno di questi è dovuto al Cassini, ed è riportato in molti « Corsi di Topografia » dove talvolta sono indicate anche altre soluzioni.

Ambedue i procedimenti sopra ricordati permettono, con qualche calcolo preliminare, di ottenere celermente le coordinate totali del punto P da determinare.

La soluzione che segue, permette sia la rapida determinazione trigonometrica del punto P (distanza $\overline{CP}$) sia la successiva definizione delle sue coordinate (risoluzione completa del problema), per mezzo della macchina calcolatrice o dei logaritmi.

I dati topografici conosciuti sono, come è noto, le coordinate cartesiane ortogonali dei tre punti (nell'ordine) A, C, B, e gli angoli α e β misurati da P. (vedi figura). Nel caso del problema espresso sotto forma trigonometrica, i dati conosciuti sono invece le distanze $\overline{AC} = a$, $\overline{CB} = b$, e l'angolo $ACB = w$, oltre agli angoli α e β.

La distanza CP, che risolve il problema, si ottiene nel modo che segue:

A) *Calcoli preliminari*, eseguibili sia con la macchina calcolatrice sia con i logaritmi:

$$d_1 = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} \; ; \quad d_2 = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} \; ; \quad \gamma = \alpha + \beta + w - \pi \; ;$$

$$H = d_1 \cdot d_2 \qquad K^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2\,H \cos \gamma$$

con π, 180° o 200^c, a seconda che lo strumento impiegato per la misura degli angoli è sessagesimale o centesimale.

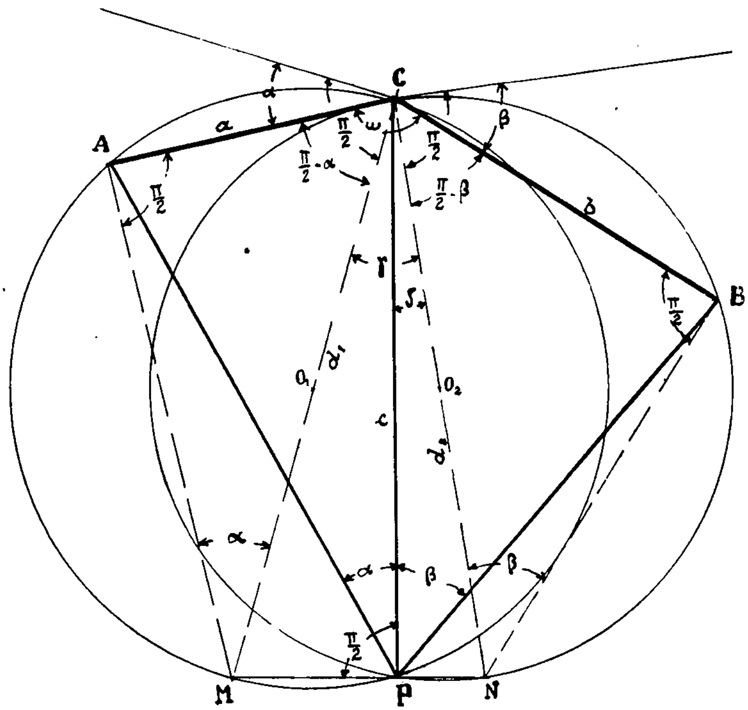

FIG. 1

B) *Calcolo della distanza incognita CP* con la macchina calcolatrice o con i logaritmi:

$$\overline{CP} = c = \frac{H \operatorname{sen} \gamma}{K} \qquad 1.$$

Come si vede, si arriva alla determinazione del lato incognito in un tempo assai breve e con calcoli molto semplici. L'unica attenzione va posta nel calcolo con i logaritmi, della formula per la distanza K.

Se il problema è completo, ossia sono date le coordinate dei tre punti A, C e B, le operazioni vanno condotte come segue:

A) *calcoli preliminari;*

macchina calcolatrice e logaritmi

$$(AC) = \text{arc tg}\,\frac{X_C - X_A}{Y_C - Y_A}$$

$$(CB) = \text{arc}\ tg\,\frac{X_B - X_C}{Y_B - Y_C}$$

$$\gamma = \alpha + \beta + (AC) - (CB)$$

macchina calcolatrice	logaritmi
$d_1 = \dfrac{\sqrt{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2}}{\text{sen}\,\alpha}$	$d_1 = \dfrac{X_C - X_A}{\text{sen}\,(AC)\ \text{sen}\,\alpha}$
$d_2 = \dfrac{\sqrt{(X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2}}{\text{sen}\,\beta}$	$d_2 = \dfrac{X_B - X_C}{\text{sen}\,(CB)\ \text{sen}\,\beta}$

quindi il calcolo precede come nel caso precedente, sino alla determinazione della distanza $\overline{CP}$.

Si determinano poi i valori:

(2) $\delta = \text{arc cos}\,\dfrac{c}{d_2}$; (3) $(CP) = (CB) + \delta + \dfrac{\pi}{2} - \beta$;

quindi si passa alle coordinate del punto P:

(4) $X_P = X_C + c \cdot \text{sen}\,(CP)$; $Y_P = Y_C + c \cdot \cos\,(CP)$

il calcolo è così terminato.

La giustificazione delle formule soprastanti è la seguente: si consideri il procedimento risolutivo detto « delle perpendicolari » indicato nella figura, la cui costruzione risulta evidente (1).

Prendiamo in esame il triangolo $C\hat{M}N$, del quale si possono facilmente avere i lati $\overline{CM}$ (d_1) e $\overline{CN}$ (d_2), considerando i triangoli rettangoli $A\hat{C}M$ e $C\hat{B}N$.

Con ciò si hanno le:

$$d_1 = \frac{AC}{\text{sen}\,\alpha} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{CB}{\text{sen}\,\beta}$$

L'angolo $M\hat{C}N$ (γ) risulta eguale all'angolo $A\hat{C}B$ (w) diminuito degli angoli

$$A\hat{C}M\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \text{e} \quad N\hat{C}B\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right),$$

e quindi:

$$\gamma = w + \alpha + \beta - \pi\,.$$

(1) Il procedimento analitico (dovuto al Cassini) si basa sulla determinazione delle coordinate dei punti M ed N, dedotte le quali si scrive l'equazione della retta MN, quindi quella della perpendicolare ad essa passante per C. Fatto sistema di queste due equazioni, si ricavano le coordinate del punto P cercato. Questo procedimento non si presta al calcolo logaritmico, ed alla risoluzione trigonometrica del problema.

Conoscendo tre elementi del triangolo $C\hat{M}N$ esso risulta determinato e si possono col calcolo determinare gli altri elementi. In particolare l'altezza, (segmento $c = \overline{CP}$), per la quale si ha $c = \dfrac{2\,S}{MN}$. Ma l'area può esprimersi mediante la: $2\,S = d_1\,d_2$ sen γ e la base $\overline{MN}$ per mezzo del teorema di Carnot. Si ottiene così la formula (1) proposta.

Nel secondo caso (soluzione del problema completo) le distanze d_1 e d_2 sono calcolate in funzione delle coordinate dei punti A, C, B.; gli azimut delle direzioni (AC) e (CB) vengono ottenute con le formule note della poligonometria come è stato indicato. L'angolo γ è ottenuto attraverso tali azimut con la formula dianzi indicata. Determinata, col criterio già esposto, la distanza c, si ottiene l'angolo δ (vedi fig. e formula (2)) e quindi l'azimut (CP) tramite l'azimut (CB) e gli angoli δ e β per mezzo della formula (3) precedente.

In caso di indeterminazione del problema, si otterrà:

$$d_1 = d_2; \qquad \gamma = 0\,.$$

(quadrilatero $ACBP$ ciclico).

NOTA DELLA REDAZIONE:

Ricordiamo che V. Galkiewicz nel 1936 ha proposto una non meno interessante soluzione analitica di questo problema, che torna utile specialmente quando si può disporre di una macchina calcolatrice.

Facendo uso della stessa figura riportata nel testo ed indicando con: $x_1\,y_1$ le coordinate del vertice A, $x_2\,y_2$ quelle del vertice C, $x_3\,y_3$ quelle del vertice B, tutte naturalmente note; con $x_0\,y_0$ le coordinate (incognite) del vertice di stazione P e chiamato φ l'azimut del lato PA, si ha il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = (y_1 - y_0) \cdot \cot\varphi \\ x_2 - x_0 = (y_2 - y_0) \cdot \cot(\varphi + \alpha) \\ x_3 - x_0 = (y_3 - y_0) \cdot \cot(\varphi + \alpha + \beta) \end{cases}$$

dal quale scende facilmente la [1];

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{(y_1 - y_2) \cdot \cot\alpha + (y_3 - y_1) \cdot \cot(\alpha + \beta) + (x_2 - x_3)}{(x_1 - x_2) \cdot \cot\alpha + (x_3 - x_1) \cdot \cot(\alpha + \beta) + (y_3 - y_2)}$$

e conseguentemente:

$$x_0 = \frac{(y_2 - y_1) + x_1 \cdot \text{tang}\,\varphi - x_2 \cdot \text{tang}\,(\varphi + \alpha}{\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,(\varphi + \alpha)}$$

$$y_0 = y_1 + (x_0 - x_1) \cdot \text{tang}\,\varphi$$

che risolvono completamente il problema (determinazione delle coordinate del punto di stazione P).

[1] Cfr. p. es. G. Boaga, *Trattato di Geodesia e Topografia*, vol. II, a pag. 235 (Ed. Cedam, Padova).

PROFILI

AGOSTINO CODAZZI (1793-1859)

Topografo, cartografo, progettista del Canale di Panama

DOTT. NEVIO MATTEINI

In un giorno imprecisato del 1810 si presentò al maggiore artiglieria a cavallo Pier Damiano Armandi di Faenza un giovanetto gracile e sparuto. Si piantò sull'attenti e disse: « Sono Agostino Codazzi di Lugo: ho diciassette anni. Vorrei essere arruolato nella Scuola del genio e dell'artiglieria di Modena ». L'ufficiale squadrò ben bene quel frugoletto, e, lasciandosi scappare un risolino beffardo, rispose: « Sei troppo piccolo. Sua Maestà Napoleone I vuole soldati completi, in tutto e per tutto. Mi spiace, ma non c'è nulla da fare. Torna fra qualche anno ». Il volto del ragazzo avvampò; i suoi occhi sfavillarono. Fissò il maggiore con uno sguardo fiero e proruppe con voce sdegnosa in queste parole: « Adunque l'Imperatore è si povero da temere d'impiegare male una razione per un volontario ? ». L'ufficiale diventò di colpo serio, serio. Rifletté sulla frase del suo giovane conterraneo, osservò ancora una volta colui che l'aveva pronunciata. Era fatta.

Fu così che Agostino Codazzi entrò nell'esercito italiano. Cannoniere di prima classe, artificiere, brigadiere, furiere, maresciallo d'alloggio e, da ultimo, maresciallo in campo: ecco i gradi raggiunti frequentando le scuole militari. Appena ventenne, partecipa alla guerra di Germania, in una compagnia comandata dall'Armandi. Si distingue a Konigswarta, Bautzen, Dennewitz, Juteborg, meritandosi una decorazione al valore, « l'Anello Napoleonico », mentre il suo protettore è nominato sul campo colonnello d'artiglieria. Ritornato in Italia, passa agli ordini di Eugenio e prende parte allo scontro di Roverbella, dove vede morire da prode Gaetano Millo. Crollato definitivamente l'Impero, invece di servir l'Austria, si dà al commercio ed alle più svariate forme d'attività, peregrinando da Livorno a Costantinopoli, da Bucarest ad Amsterdam. Di qui, con un amico, già ufficiale dell'esercito napoleonico, salpa per l'America latina.

Ivi giunto, trovasi subito a suo agio: gli Stati che stavan sorgendo dal crollo dei domini coloniali della Spagna e del Portogallo promettevano ed offrivano compensi di trionfi e di riconoscenza a tutti quelli che prestavano loro aiuto. Aggiungasi che il Codazzi si sentiva ed era un soldato della libertà, uno che combatteva le migliori battaglie per vocazione. Lungo sarebbe seguire il Nostro nelle numerose e varie imprese americane cui andò incontro dal 1817 al 1822: chi, del resto, avesse grato di ripercorrere tutte le tappe ragiunte dal Romagnolo, ha oggi la possibilità di farlo. Il Longhena invero, da oltre un ventennio ha reso pubblico il diario che dei suoi viaggi redasse lo stesso Codazzi, diario che attualmente è conservato nella Biblioteca Piancastelli di Forlì. Comunque sia, a ventiquattro anni, Agostino Codazzi è tenente dell'esercito messicano; poco dopo è capitano per valore dimostrato all'arma bianca contro i rivoltosi della Florida; maggiore per aver respinto un assalto di Spagnoli nell'Honduras; tenente colonnello per una missione compiuta in Columbia. All'elevata posizione sociale, alla fama s'aggiunge la ricchezza, non solo quale frutto del rango, ma anche come dono insperato della fortuna: un servo indigeno infatti, morendo, gli lascia sei bottiglie colme di polvere d'oro.

Quando Agostino Codazzi ritorna in Romagna, è ricco milionario. Compera presso la destra del Sillario, nel comune di Massa Lombarda, un podere: vi costruisce una casa e si dà alla dura vita dei campi, non disdegnando tuttavia di cospirare per una Italia libera. Ma la vita avventurosa d'oltre Oceano lo richiama: a trentatrè anni eccolo di nuovo nel Venezuela, che allora faceva parte della Repubblica Colombiana. Il 1º novembre 1826 s'incontra con colui che era salutato il « padre della patria »: Simone Bolivar. Il Codazzi non scordò questo incontro, tanto che – vent'anni dopo – scriveva testualmente: « Nunca podrè olvidar la impresion que se causò a quel espectaculo ». Fu nominato comandante dell'artiglieria e insignito dell'« Orden de Libertadores ».

Incomincia in questo tempo la vera, la più tipica attività del Nostro: quella di cartografo e di geografo. Fu infatti in questi anni che egli, per motivi d'ordine militare, rileva topograficamente in mappe particolareggiate i frutti delle sue esplorazioni. Scioltasi la Repubblica di Columbia e formatosi lo Stato del Venezuela, il Codazzi raggiunse il grado di Capo dello Stato Maggiore Generale ed ha l'incarico di rilevare tutto il paese nonché di redigere una geografia statistica di tredici province. Si dà animo e corpo all'immane e difficile opera, accontentandosi d'un modesto compenso. Due lustri di lavoro: decine e decine di mappe; quadri statistici accurati, esatti, completi: carte storiche, fisiche, politiche; osservazioni perspicaci e geniali. « Questa sua geografia del Venezuela – non saprei dir meglio del Longhena – è un libro vivo, palpitante di vita umana, vegetale ed animale, ha l'attrattiva del romanzo, la rigidità della scienza, la compostezza del trattato ». Soprattutto aggiungo io – ha l'impronta inconfondibile della nostra stirpe.

La schiavitù ebbe in lui sempre un incondizionato e tenace oppositore. Sentite con quanto disgusto, con quanta amarezza scrive in un memoriale, a proposito degli abusi delle autorità venezuelane in una provincia: « La oppressione che regna qui non trova l'eguale in nessun altro luogo della Repubblica. Gli Indios sono realmente schiavi: non sono sicuri né nei loro campi né nelle loro abitazioni. Esistono duemila persone che lavorano senza paga, senza riposo, ininterrottamente, a favore di soli quindici egoisti ».

L'improba e magnifica fatica gli valse, dapprima, il titolo di « Coronel de Ingenieros » e, poi, la nomina a Primo Rettore della sezione matematica nella Scuola militare di Caracas e l'invio a Parigi per tradurre in realtà topografica l'atlante e le carte che lo accompagnavano. L'11 luglio 1840, insieme con la moglie (certa Aracoeli Fernandez dela Hoz, di nobile famiglia spagnola, che aveva sposato sei anni prima) lasciava il Venezuela per l'Europa. Quivi giunto, prima sua cura fu quella di presentare il suo lavoro all'Accademia parigina delle Scienze: il giudizio della commissione, composta da insigni studiosi, quali Arago, Savary, Elia de Beaumont, Boussingault, fu lusinghiero. Pochi mesi dopo usciranno « L'Atlas fisico y politico de la republica de Venezuela » e il « Resumen de la geografia del Venezuela », che dell'Atlante è commento, spiegazione ed interpretazione.

Ritornato nella patria adottiva e avuto l'incarico di gettare le basi di una colonia di contadini europei, fonda presso la valle di Aragua un centro di colonizzazione, disboscando, costruendo strade, elevando edifici. Ma un nuovo incarico gli viene affidato: egli pure, pur malvolentieri, lascia la colonia « che era uscita dalla sua anima, desiderosa di bene », per assumere il governo della provincia di Barinas (1846). Ivi lo coglie un rivolgimento politico, che sfocia nella dittatura del Monagas: il Codazzi, posti al sicuro la moglie e i figli nell'isola olandese di Aruba, ripara nella Nuova Granata (la odierna Colombia), da dove aveva ricevuto insistenti inviti di collaborazione. E infatti non passa molto tempo che il Nostro diviene direttore della Scuola Militare Superiore di Bogotà ed ha l'incarico di eseguire l'intera cartografia del nuovo paese.

Era, quella, l'epoca nella quale l'Inghilterra, la Francia, e gli Stati Uniti specialmente s'interessavano alla soluzione d'un'opera di grande importanza e d'immenso valore: un canale che collegasse l'Atlantico col Pacifico. La Columbia non poteva, non voleva restare indietro alle altre Nazioni: ma come raggiungere questo scopo, se non aveva neppure il rilievo topografico delle terre presso l'istmo ? Occorreva un uomo alacre di mente, fervido di propositi, competente e disinteressato: quell'uomo fu lui, Agostino Codazzi.

Nel gennaio 1850 s'accinse all'impresa, che interruppe quattro anni dopo, allo scoppio della guerra civile, per riprendere la spada: eletto Capo di Stato maggiore, fortifica Honda, si distingue nella battaglia di Petaquero e prende parte alla presa di Bogotà, meritandosi il grado di generale. Già tutte le regioni erano state esplorate, già le carte topografiche erano pronte, quando il 7 febbraio 1859 le febbri tropicali lo stroncarono nel teatro stesso dei suoi gloriosi lavori, come un gliadiatore della civiltà.

Morì poveramente. Fu sepolto con il suo abito da viaggio, sotto un tumolo di pietre. La sua scomparsa – oh ingratitudine umana ! – fu ufficialmente ignorata. Più tardi, un ignoto, ne esumò i resti e li portò a Bogotà: di qui la vedova li fece portare a Valencia, invano reclamati dal Venezuela che voleva deporli nel Pantheon di Caracas, accanto a quelli di Bolivar. La sua opera scientifica sulla Columbia, che gli era costata un decennio quasi di eroica applicazione, fu pubblicata sotto il nome di altri. Nessuno tuttavia può negare – come ha scritto un suo biografo, l'Ancizar – che i risultati delle imprese di Agostino Codazzi abbiano carattere di monumento. Non per niente, allorché nel 1854 la commissione anglo-franco americana percorse l'istmo di Panamà, le fece da guida proprio il Nostro; il quale, anche se morì prima di veder tradotto in azione il piano, da lui esattamente progettato di collegare i due Oceani seguendo il Rio Chagres e il Rio Grande, ha tuttavia il merito d'esser stato uno dei primi progettisti, indubbiamente il più chiaroveggente, della grandiosa impresa coloniale.

GIOVANNI DE BERNARDINIS (1846-1937)

Geodeta ed Astronomo

Giovanni De Bernardinis, nato a Catanzano (Abruzzi) nel 1846, chiuse la sua operosa vita a Chieti nel 1937. Egli fu un geodeta « silenzioso »: laureato in matematica (1870) ed in ingegneria (1873) a Napoli, su invito del Prof. Schiavoni, geodeta capo dell'Istituto Topografico Militare – ove le teorie ed i metodi della scienza geodetica, introdotti dall'Amanti allievo di Barnaba Oriani, trovavano larga applicazione – entra in detto Istituto e si viene a trovare a diretto contatto con i reali problemi della geodesia operativa, a cui un grande impulso era stato impresso dalle mirabili lezioni tenute a Pisa da Ulisse Dini ed introdotte allo Istituto Topografico Militare dal Guarducci, allievo del Dini. Nel 1886 vince il concorso universitario per la cattedra di Geodesia a Genova e viene nominato straordinario a Messina; nel 1900 passa a Napoli, dove nel 1908 – in seguito a collocamento a riposo del Fergola – assume anche lo insegnamento della Astronomia, che tiene fino al 1921, epoca del suo collocamento a riposo. Fu membro ordinario della Commissione geodetica italiana e della Accademia delle scienze di Napoli.

I suoi lavori si riferiscono ad importanti capitoli della Geodesia e riguardano le Carte geografiche, le Compensazioni delle reti trigonometriche, Problemi vari sulle coordinate, sulla Livellazione geometrica di precisione, sulla Rotazione della linea degli apsidi delle orbite planetarie, ecc. Le sue « Lezioni » di Geodesia e di Astronomia pubblicate in dispense costituiscono veramente due gemme preziose dal punto di vista della didattica e della dottrina e mettono in luce la profondità del Suo ingegno.

G. C.