

LA RAPPRESENTAZIONE CONFORME DI GAUSS-BOAGA

DOTT. ING. ALFREDO PAROLI

Il sistema di rappresentazione GAUSS-BOAGA nell'ultimo decennio ha avuto in Italia notevoli e vaste applicazioni nel campo della cartografia e della geodesia.

A tale sistema sono state riferite infatti le Carte fondamentali dallo Stato (e in particolare le carte topografiche 1 : 100.000 e 1 : 25.000 dell'Istituto Geografico Militare, le più recenti mappe del Nuovo Catasto, ecc.), e ad esso sono state altresì o vengono trasformate le reti trigonometriche preesistenti e calcolate le nuove reti.

Riteniamo perciò che una breve nota illustrativa sull'argomento non sia inopportuna, né priva di interesse per i cultori della topografia e della fotogrammetria e che possa anzi contribuire a diffondere la conoscenza dei fondamenti geometrici della moderna cartografia ed a rendere evidente la graduale evoluzione rispetto al passato.

Una trattazione matematica del tema che ci siamo proposti potrebbe risultare opportuna ma procederemo per altra via, cioè faremo del nostro meglio per conseguire l'intento mediante una esposizione di carattere informativo, senza ricorrere, in alcun caso, a formule più o meno astruse in apparenza, anche se concettualmente semplici e di applicazione relativamente facile.

Procureremo altresì di mettere in evidenza i vantaggi che, dal sistema di rappresentazione considerato, sono derivati o potranno ulteriormente derivare per la cartografia italiana e per la geodesia operativa.

Ci sia lecito premettere alcune brevi considerazioni di carattere generale sulle rappresentazioni cartografiche.

I. — GENERALITÀ.

Come è noto, per formare una Carta geografica o topografica, è necessario anzitutto scegliere un opportuno *sistema di rappresentazione* (o di proiezione), cioè stabilire la legge di corrispondenza fra i punti della porzione di superficie terrestre che si vuole rappresentare e i punti del piano di rappresentazione (piano della Carta).

La detta corrispondenza fra le due superfici deve essere *biunivoca*, ossia tale che a ciascun punto di una di esse corrisponda un punto unico e determinato dell'altra e reciprocamente.

La scelta del sistema di rappresentazione, pur presentando, in senso astratto, un carattere di arbitrarietà, viene limitata e definita in base alle esigenze cui la Carta deve soddisfare, nei riguardi geometrici e in relazione alle sue finalità.

Sulla superficie terrestre (o sull'ellissoide che ad essa si intende sostituito) la posizione dei singoli punti è determinata quando di essi siano note le coordinate geografiche (latitudine φ e longitudine λ), mentre nel piano della Carta i corrispondenti punti possono essere individuati mediante le coordinate cartesiane (ascissa x e ordinata y) rispetto ad un sistema di assi ortogonali giacente nel piano stesso.

Di conseguenza l'accennata corrispondenza biunivoca, stabilita dal sistema di rappresentazione adottato, si traduce in una corrispondenza – pure biunivoca – fra le coppie di coordinate geografiche φ e λ dei singoli punti dell'ellissoide terrestre e le coppie di coordinate cartesiane x e y dei rispettivi punti immagine sulla Carta.

È perciò intuitivo che (a meno di difficoltà di carattere analitico), scelto il sistema di rappresentazione, dalle coordinate geografiche φ , λ , di un punto P qualsiasi della superficie terrestre potranno ricavarsi – mediante apposite formule – le coordinate cartesiane x , y del punto P' che ad esso corrisponde sulla Carta. È pure ovvio che, reciprocamente, avvalendosi di formule inverse, date le x , y del punto P' della Carta, sarà possibile calcolare le coordinate geografiche φ e λ del corrispondente punto P sulla superficie terrestre.

Ogni sistema di rappresentazione dà luogo ad inevitabili deformazioni delle figure rappresentate. In altri termini, non è possibile rappresentare la superficie terrestre nel piano della Carta in modo che la scala delle lunghezze abbia un valore costante in tutti i punti e per tutte le direzioni.

A seconda del sistema prescelto, si può tuttavia ottenere che la scala delle lunghezze sia costante in determinati punti o lungo determinate linee o che varii il meno possibile in prossimità di essi; oppure che sia costante il rapporto fra l'area racchiusa da una figura di dimensioni finite, qualsiasi, tracciata sulla superficie terrestre e l'area corrispondente sulla Carta (*rappresentazioni equivalenti*); ovvero che ad un angolo qualsiasi, misurato sulla superficie terrestre, corrisponda un angolo uguale sulla Carta (*rappresentazioni conformi o autogonali*).

Lo studio dei vari sistemi di proiezione può essere effettuato riferendosi ai cosiddetti « *moduli di deformazione* », lineare superficiale e angolare.

Dicesi *modulo di deformazione lineare* il rapporto fra un *elemento lineare* della Carta e il corrispondente elemento della superficie terrestre, ossia (più intuitivamente) il rapporto fra la distanza di due punti molto vicini, misurata sulla Carta, e la effettiva distanza dei punti stessi sul terreno.

Modulo di deformazione superficiale è, analogamente, il rapporto fra un'area infinitesimale (ossia un'area di estensione assai limitata) misurata sulla Carta e la corrispondente area misurata sulla superficie terrestre. Si denomina infine *modulo di deformazione angolare* la differenza fra l'angolo formato da due linee

qualsiasi, tracciate sulla Carta e l'analogo angolo formato dalle corrispondenti linee, considerate sulla superficie terrestre.

Riferendoci in modo particolare ai sistemi conformi, osserviamo che in essi, per la caratteristica proprietà cui abbiamo accennato precedentemente, i triangoli infinitesimali della rappresentazione cartografica sono *simili* ai corrispondenti triangoli, tracciati sulla superficie terrestre. Cioè, come suol dirsi, è *conservata la similitudine delle parti infinitesime*: requisito di speciale importanza ai fini applicativi e che, per i sistemi conformi, consente e favorisce talune utilizzazioni particolarmente notevoli all'infuori della cartografia vera e propria e precisamente nel campo della geodesia.

Per le rappresentazioni conformi, stante l'accennata conservazione degli angoli, *risulta ovviamente uguale a zero il modulo di deformazione angolare*; mentre, per accennata conservazione della similitudine, in ogni punto le lunghezze elementari misurate sulla Carta in una direzione qualsiasi risultano proporzionali alle lunghezze corrispondenti sul terreno, cioè *è costante il modulo di deformazione lineare in una direzione qualunque*.

Parimenti risulta costante, nell'intorno di ogni punto, il rapporto fra un'area elementare qualsiasi misurata sulla Carta e l'area corrispondente del terreno.

Inversamente, è conforme qualunque rappresentazione che soddisfi alle predette condizioni riguardo ai tre moduli di deformazione.

Partendo da tali condizioni, con elegante procedimento dovuto al CHAUCHY (procedimento che ci limitiamo a citare), si ottengono le formule fondamentali delle rappresentazioni conformi, ossia le espressioni delle coordinate cartesiane x, y di un punto qualsiasi della Carta, in funzione delle coordinate geografiche φ e λ del corrispondente punto della superficie terrestre; nonché le formule (reciproche) che forniscono φ e λ in funzione di x e y .

Da tali formule generali, imponendo, caso per caso, altre condizioni cui la rappresentazione deve soddisfare, possono poi ricavarsi formule particolari per i vari sistemi conformi.

Fra essi citiamo, ad es., il ben noto sistema di MERCATORE (risalente al secolo XVI), nel quale le coordinate cartesiane x, y della Carta sono proporzionali rispettivamente alla latitudine (isometrica) ed alla longitudine dei singoli punti.

Tale sistema, mentre presenta requisiti assai utili ed anch'essi ben noti per le Carte ad uso della navigazione, dà luogo a deformazioni lineari assai notevoli e che per le zone di latitudine abbastanza elevata divengono eccessive e quindi non conciliabili per le applicazioni metriche.

II. — IL SISTEMA GAUSSIANO E LE SUE CARATTERISTICHE.

Il grande matematico e fisico C. F. GAUSS, per potere mantenere entro ristretti limiti le deformazioni lineari della rappresentazione conforme, pose la condizione che, sviluppando nel piano della Carta (secondo una linea retta) un determinato meridiano compreso nella zona da rappresentare (e quindi, pre-

feribilmente, il *meridiano centrale*), tale sviluppo debba avvenire *senza alcuna alterazione di lunghezza*.

In tale guisa la distanza fra due punti, giacenti entrambi sul meridiano considerato, risulta identica, tanto sull'ellissoide terrestre, quanto nel piano della Carta (beninteso, tenuto conto della scala).

Ciò equivale a dire che, alle suaccennate condizioni generali di conformità (modulo angolare *nullo*, moduli lineare e superficiale *costanti*) viene aggiunta l'altra condizione: che lungo tutto il meridiano centrale il modulo lineare deve essere costante.

Il sistema conforme, così ottenuto, è denominato *rappresentazione di GAUSS* ⁽¹⁾.

In tale rappresentazione, allontanandosi dal meridiano centrale, cioè spostandosi verso est o verso ovest, hanno luogo deformazioni gradualmente crescenti (e simmetriche, cioè uguali per punti situati ad uguale distanza dal meridiano centrale, dall'una o dall'altra parte), ma sempre relativamente lievi.

Le dette deformazioni, per elementi infinitesimi (cioè per brevi lunghezze misurate sulla superficie terrestre) sono proporzionali al quadrato delle distanze degli elementi stessi dal meridiano centrale.

In particolare per tutti i punti ubicati alla medesima distanza dal detto meridiano ha luogo la medesima deformazione.

Per dare una concreta idea circa la entità delle deformazioni lineari sopra accennate, riferiamoci, per es. *alla lunghezza di un chilometro*, assunta sulla superficie terrestre, in una direzione qualsiasi, alla latitudine media dell'Italia (cioè alla latitudine di circa 40 gradi):

Se il punto medio di tale lunghezza dista di 100 km dal meridiano centrale, la sua deformazione (allungamento) risulta di m. 0,123 ossia è poco superiore ai 12 centimetri.

In altri termini, nella rappresentazione di GAUSS, alla lunghezza di 1000 metri misurata sulla superficie terrestre corrisponderà una lunghezza di metri 1000,123 sulla Carta.

Nel prospetto qui appresso riportato, indichiamo le deformazioni che la stessa lunghezza di 1000 metri subisce per diversi valori della sua distanza dal meridiano centrale.

Distanza dal meridiano centrale		deformazione per km	Distanza dal meridiano centrale		deformazione per km
km	50	m 0,03	km	500	m 3,08
»	100	» 0,12	»	1000	» 12,31
»	150	» 0,28	»	2000	» 49,23
»	200	» 0,49	»	3000	» 110,77

(1) È da notare che C. F. GAUSS considerò e risolse il problema nel caso più generale, riferendosi cioè alla rappresentazione di una superficie qualsiasi sopra un'altra, pure qualsiasi, con particolare riguardo alla rappresentazione dell'ellissoide sopra la sfera.

Come si vede, la lunghezza di 1 km si allunga di soli 3 cm alla distanza di 50 km dal meridiano centrale; per le distanze di km 100 e km 200, l'allungamento è rispettivamente di 12 cm e di 49 cm, cresce ulteriormente a m 3 ed a m 12 circa alle distanze di 500 km e di 1000 km; fino a quest'ultima distanza l'allungamento non supera l'uno per cento circa ed è quindi cartograficamente ammissibile (salvo taluni ripieghi, cui – come accenneremo più oltre – si può fare ricorso per ridurre gli effetti).

Al di là dei 1000 km le deformazioni lineari divengono eccessive.

Può concludersi che, qualora ci si riferisca ad una fascia di notevole larghezza (da 500 a 1000 km ad est e ad ovest del meridiano centrale) la rappresentazione gaussiana si presta nel miglior modo per la rappresentazione cartografica, giacché le inevitabili deformazioni lineari – uguali a zero lungo il detto meridiano – si mantengono entro limiti ammissibili per tutta la fascia considerata.

Può qui farsi un'interessante osservazione.

È noto che le distanze misurate sul terreno debbono essere ridotte al livello del mare cioè ridotte alla superficie dello sferoide terrestre di riferimento e che, con tale riduzione, subiscono un'accorciamento.

Infatti, considerando due punti, per es., all'altitudine di 1.800 metri circa la distanza effettiva intercedente fra essi si intende misurata sopra uno sferoide il cui raggio è maggiore di 1,8 km rispetto allo sferoide terrestre (il cui raggio è prossimo a km 6.400).

Se la distanza dei due punti è di 1 km, essa con la riduzione allo sferoide terrestre si accorcia in ragione di $\frac{1,8}{6.400}$, cioè diviene uguale a m 999,72 circa, con un accorciamento quindi di 28 cm. Tale perciò è la distanza fra i punti fornita dalla rappresentazione cartografica.

Se si esamina la tabella sopra riportata si vede che nella proiezione gaussiana a distanza di 150 km dal meridiano centrale si ha un *allungamento* appunto di cm 28. Ossia nel caso considerato è evidente che all'allungamento percentuale dovuto al sistema di proiezione è dello stesso ordine di grandezza dell'accorciamento derivante dalla riduzione delle distanze al livello del mare e che l'una e l'altra deformazione sono cartograficamente trascurabili.

Il GAUSS non lasciò particolari scritti sulla teoria relativa al sistema di rappresentazione da lui ideato e si limitò a indicarne le formule fondamentali nel Corso di Alta geodesia ed in relazioni epistolari.

Sviluppi sistematici sull'argomento sono stati dati da O. SCHREIBER, e successivamente, ma sempre in un passato ormai lontano, da F. R. HELMERT, da L. KRUGER, (al quale ultimo è dovuta una trattazione completa), dallo JORDAN e dal nostro G. B. MAFFIOTTI.

Tuttavia in quell'epoca il sistema gaussiano non trovò particolare considerazione rispetto ad altri sistemi, tanto che in vari trattati di geodesia non

era esposto o trovava soltanto limitati accenni, né ebbe estese applicazioni, benché fosse stato adoperato dallo stesso GAUSS per la formazione della mappa catastale dell'HANNOVER e nel calcolo di triangolazioni.

A quest'ultimo proposito deve notarsi che, fino ad epoca assai recente, le triangolazioni sono state calcolate e compensate riferendosi quasi esclusivamente alle coordinate geografiche dei relativi vertici: cioè applicando formule e sviluppi abbastanza complicati, ma il cui uso era tradizionale.

L'esecuzione dei calcoli in coordinate rettilinee x e y , cioè con riferimento dei vertici agli assi cartesiani di un determinato sistema di rappresentazione cartografica era limitata alle triangolazioni di piccola estensione ovvero a quelle che, pur interessando zone assai vaste, presentavano carattere piuttosto topografico che geodetico; tali ad es. le triangolazioni del Catasto, calcolate nella proiezione di CASSINI-SOLDNER in Italia, nella proiezione di LAMBERT in Francia, ecc.

Soltanto in epoca relativamente recente, nuove necessità sorte nel campo della geodesia e, in particolare, quelle derivanti dai problemi di unificazione delle reti trigonometriche per zone assai vaste, comprendenti ad es. l'intero territorio di uno Stato o anche il complesso di più territori statali, hanno reso manifesta non soltanto la possibilità, ma anche la concreta utilità di effettuare i calcoli di triangolazione in coordinate rettilinee (anziché in coordinate geografiche).

Tale nuova metodologia calcolativa è stata attuata facendo riferimento soprattutto alla rappresentazione gaussiana la quale per la sua *conformità* e la lieve entità delle deformazioni cui dà luogo, soddisfa meglio degli altri sistemi di proiezione, ai requisiti richiesti.

La prassi di calcolo in coordinate rettilinee è entrata perciò nel corrente impiego.

Correlativamente, per la convenienza di adottare un unico riferimento sia per le triangolazioni, che per la cartografia che ad esse si appoggia, si è rapidamente esteso l'impiego della predetta rappresentazione anche per la formazione delle Carte.

III. — LA RAPPRESENTAZIONE GAUSS-BOAGA E SUE APPLICAZIONI IN ITALIA.

L'accennata innovazione nel calcolo delle triangolazioni e nella cartografia e le conseguenti necessità di consentire quelle semplificazioni che possano condurre ad una riduzione di lavoro e di spesa, hanno dato luogo a nuovi interessanti studi riguardo alla proiezione gaussiana, fra le quali particolarmente notevoli in Italia le ricerche dovute a G. BOAGA, in Francia quelle di P. TARDI.

Il BOAGA, oltre a dare per la rappresentazione di GAUSS, una completa trattazione, ha stabilito formule particolarmente adatte per il calcolo nume-

rico, così da renderlo rapidamente eseguibile sia con i logaritmi, sia con metodo misto, cioè mediante i logaritmi integrati dall'uso della macchina calcolatrice.

Per raggiungere lo scopo, ha considerato, fra l'altro, l'entità e la legge di variazione dei termini correttivi che compaiono nelle varie formule ed ha calcolato i valori numerici di tali termini riunendoli in speciali tabelle di agevole impiego ⁽¹⁾.

Secondo il nostro proposito, non vogliamo riportare formule, né effettuare una trattazione matematica. Ci sia lecito accennare tuttavia che i principali problemi di calcolo risolvibili con le suaccennate formule riguardano il passaggio dalle coordinate geografiche φ , λ a quelle rettilinee x , y nel sistema di rappresentazione, nonché il passaggio inverso, come pure la risoluzione di altri problemi connessi alla calcolazione.

Fra questi ultimi è preminente, *la risoluzione del triangolo geodetico per mezzo delle coordinate rettilinee*; cioè il calcolo dei lati e degli angoli di un triangolo (tracciato sull'ellissoide terrestre) dei cui vertici siano note le coordinate rettilinee nel sistema GAUSS-BOAGA.

È qui da notare che la similitudine fra le figure dell'ellissoide e della rappresentazione piana (similitudine conseguente all'ipotesi della conformità) è rigorosamente verificata soltanto per le figure infinitesime, in particolare per i triangoli piccolissimi.

In un grande triangolo, invece, gli allungamenti dei tre lati non avvengono secondo una rigorosa legge di proporzionalità, bensì presentano lievi differenze percentuali, variabili con la lunghezza di ciascuno di essi.

Ne consegue che, per i grandi triangoli, gli angoli veri, cioè considerati sull'ellissoide terrestre, non sono identici a quelli forniti dalla rappresentazione conforme per i triangoli rettilateri.

Tuttavia, operando in coordinate rettilinee di GAUSS-BOAGA, dalle lunghezze dei lati e dalle ampiezze degli angoli forniti dalla rappresentazione piana è assai agevole risalire ai corrispondenti valori *esatti* sull'ellissoide; così che la risoluzione del triangolo geodetico è relativamente semplice. Altrettanto dicasi per il calcolo delle lunghezze dei lati del triangolo geodetico.

In relazione al contributo scientifico dato dal BOAGA per il perfezionamento del sistema gaussiano e per la relativa applicazione alla rete geodetica ed alla cartografia italiana, il detto sistema in Italia è stato ufficialmente denominato *Rappresentazione Gauss-Boaga*, secondo deliberazione adottata dalla Commissione Geodetica Italiana, a seguito di referendum fra i suoi Membri.

Alla rappresentazione GAUSS-BOAGA sono state riferite, come abbiamo accennato inizialmente, o sono in corso di trasformazione, l'intera cartografia italiana, nonché la rete trigonometrica generale dello Stato.

⁽¹⁾ Vedasi la bibliografia, alla fine della presente nota.

Ai fini dell'accennata trasformazione sarebbe stato opportuno riferire l'intero territorio nazionale ad un unico sistema GAUSS-BOAGA, assumendo quindi un unico meridiano centrale.

Tale unicità di riferimento non ha tuttavia potuto essere attuata, giacché, avendo l'Italia notevole estensione anche nel senso della longitudine, per i punti più lontani dal meridiano centrale si sarebbero manifestate deformazioni troppo sensibili, specialmente ai fini dei calcoli geodetici.

È stato perciò necessario suddividere il territorio statale, inquadrandolo in due *fusi* contigui (fuso ovest e fuso est) aventi ciascuno l'ampiezza di 6° ed i cui meridiani medi hanno rispettivamente la longitudinae di 9° e di 15° est GREENWICH. Ciascun fuso si estende perciò, ad est e ad ovest del meridiano medio, per 3° , corrispondenti a circa 200 km.

I punti ricadenti in ciascun fuso sono riferiti ad un medesimo sistema di rappresentazione GAUSS-BOAGA, avente come asse delle ascisse il meridiano medio rettificato del fuso stesso.

Le ascisse x dei singoli punti sono misurate dall'equatore e quindi risultano tutte positive. Le ordinate y si intendono misurate dal meridiano centrale del corrispondente fuso e sono state anch'esse rese tutte positive (mediante l'aggiunta di opportuni costanti) per evitare quegli inconvenienti che nel pratico impiego delle Carte potrebbero derivare dall'essere negative le ordinate per i punti ubicati ad ovest del rispettivo meridiano centrale.

Sui singoli fogli delle Carte topografiche, delle mappe catastali, ecc. è impressa una quadrettatura, a maglie di opportune dimensioni, costituita dall'intersezione dei due sistemi di rette ortogonali, rispettivamente paralleli all'asse delle ascisse (cioè al meridiano centrale del rispettivo fuso, sviluppato sul piano della Carta) ed all'asse delle ordinate.

Tale quadrettatura permette di stabilire facilmente, per via grafica, le coordinate rettilinee x e y dei vari punti della Carta che possano interessare.

Ricavate graficamente le coordinate di tali punti, può facilmente calcolarsi la distanza intercedente fra essi, l'angolo di direzione della relativa congiungente, ecc.

Per ridurre gli inconvenienti che possono conseguire dall'accennata ripartizione del territorio nazionale in due fusi, è stata stabilita fra essi una *fascia di ricoprimento*, cioè una zona dell'ampiezza di $30'$ per la quale si dispone di una duplice serie di Carte e di coordinate, riferite rispettivamente all'uno e all'altro fuso.

Il massimo allungamento lineare, che ha luogo in prossimità dei limiti est ed ovest di ciascun fuso è di circa $0,8 \text{ ‰}$, mentre nessuna deformazione ha luogo sull'asse dei singoli fusi, cioè lungo il rispettivo meridiano centrale.

Per diminuire l'entità del massimo allungamento sopra citato si è ricorsi ad un opportuno ripiego, cioè si è applicata all'intera rappresentazione (cioè a tutte le coordinate) una *riduzione di scala del* $0,4 \text{ ‰}$.

Di conseguenza, in ciascun fuso l'*allungamento massimo* in corrispondenza

dei limiti est ed ovest è stato ridotto a circa 0,4 ‰, mentre lungo il meridiano centrale ha luogo un *accorciamento* nella predetta misura del 0,4 ‰.

Tale nei suoi elementi caratteristici, teorici e applicativi, la rappresentazione di GAUSS-BOAGA.

Mediante essa, oltre che realizzare le citate semplificazioni calcolative, è stato possibile collegare, secondo un unico riferimento, ossia in un unico e continuo complesso di fogli, l'intera cartografia ricadente nell'ambito di un medesimo fuso; risultato anch'esso notevole e che ha ovviato a quell'indipendenza che esisteva fra i vari fogli della Carta generale d'Italia 1 : 100.000 e 1 : 25.000, originariamente nella proiezione di FLAMMSFED, e riferiti ciascuno al proprio meridiano medio.

Analogo collegamento ed unificazione sono stati o saranno gradualmente conseguiti per le reti trigonometriche di ogni ordine e grado, così da ricondurle ad un unico e ben definito riferimento e da ovviare a quelle disomogeneità che, nel passato, hanno costituito un indubbio ostacolo per la calcolazione e per la realizzazione dei lavori cartografici.

BIBLIOGRAFIA

- ALBANI F., *I problemi di geodesia operativa risolvibili oggi dal geometra attraverso la proiezione conforme di Gauss-Boaga.* (Il Geom. Ital. anno 1955).
- BALDACCI O., *Nota introduttiva alla lettura delle carte topografiche con costruzione Gauss-Boaga e con quadrettatura chilometrica* (Boll. Soc. Geogr. Ital. anno 1951).
- BALLARIN S., *Coordinate gaussiane di punti lontani dal meridiano fondamentale.* (Boll. Geod. dell'I.G.M., 1948); *Sul passaggio delle coordinate piane gaussiane alle coordinate geografiche per punti, distanti dal meridiano fondamentale.* (Idem, 1949); *Relazioni che intercorrono fra le corrispondenze relative all'ellissoide e alla sfera nelle rappresentazione conforme di Gauss* (Idem, anno 1953).
- BOAGA G., *Sulla rappresentazione conforme di Gauss.* Istituto Geografico Militare (Collezione di testi tecnici, Firenze 1941) con tre allegati e tavole numeriche e applicazioni, (Idem 1942); *Trattato di geodesia e topografia con elementi di fotogrammetria* (C.E. D.A.M. Padova 1948); *Sviluppi in serie delle formule della rappresentazione conforme dell'ellissoide sul piano* (Rivista l'Universo, I.G.M. Firenze 1943); *Il problema inverso del trasporto delle coordinate geografiche lungo un arco di geodetica sullo ellissoide terrestre* (idem, 1943); *Sulla risoluzione dei triangoli geodetici ellissoidici attraverso la loro rappresentazione piana conforme* (idem 1943); *Sul calcolo della lunghezza di un grande arco di geodetica ellissoidica determinato dalle coordinate geografiche degli estremi* (Boll. Geod. dell'I.G.M., anno 1946); *Formule della geometria dei piccoli triangoli curvilinei e risoluzione dei problemi geodetici ellissoidici* (idem 1947); *Sulle carte geografiche* (idem, 1947); *Trigonometria geodetica sopra una superficie qualunque* (idem, 1949); *L'uso della quadrettatura chilometrica nelle carte dell'I.G.M.* (Riv. l'Ingegnere, anno 1951); *Geografia a grande scala* (Boll. della Società Geografica Italiana, Roma 1952).
- BONIFACINO B., *Su due problemi relativi alla rappresentazione di Gauss della sfera sul piano* (Rivista Catasto e SS. TT. EE., anno 1944); *Sviluppi generali in serie delle formule fondamentali relative alla convergenza dei meridiani e al modulo di deformazione lineare per le rappresentazioni conformi dell'ellissoide terrestre sul piano* (idem

anno 1953); *Formule di corrispondenza della rappresentazione conforme Gauss-Boaga per fusi di grande ampiezza* (idem, anno 1953); *Sulle formule inverse di corrispondenza nella rappresentazione conforme di Gauss-Boaga* (Boll. S.I.F.E.T., anno 1954); *La convergenza dei meridiani nella rappresentazione conforme di Gauss-Boaga, per fusi di notevole ampiezza* (Riv. Catasto e SS. TT. EE., anno 1954); *Idem per punti distanti dal meridiano centrale* (Idem, 1954).

- FRANCHI N., *I reticolati geografici delle rappresentazioni cartografiche ed in particolare quello della proiezione di Gauss-Boaga, possono immaginarsi ottenuti con considerazioni geometrico-proiettive?* (Boll. Geod. dell'I.G.M., anno 1951).
- GUIDUCCI A., *Trasformazioni delle coordinate Cassini-Soldner di piccoli sviluppi catastali in coordinate Gauss-Boaga* (Riv. Catasto e SS. TT. EE., anno 1953).
- HELMERT F. R., *Näherungsformeln für die Gauss'sche Projektion der Hannoverschen Landesvermessung* (Zeitschrift für Vermessungswesen, 1876).
- KRUGER L., *Konforme Abbildung des Erdellipsoides in der Ebene* (Ver. K. Preuss. Geod. Inst., n. 52, G. B. Teubner, Lipsia 1912); *Formeln zur Konformen Abbildung des Erdellipsoides in der Ebene* (Herausgegeben von der Preussischen Landesaufnahme Berlin, 1919);
- LENZI E., *Applicazioni della rappresentazione conforme di Gauss dell'ellissoide sulla sfera* (Boll. Geod. dell'I.G.M., anno 1952).
- MAFFIOTTI G. B., *I sistemi di proiezione nei rilevamenti catastali moderni* (Rivista di Topografia e Catasto, Torino 1900);
- MARCANTONI A., *Sulla rappresentazione gaussiana della sfera sul piano*. (Riv. Catasto e SS. TT. EE., anno 1948).
- MENESTRINA M., *Confronto fra le determinazioni delle coordinate geografiche dei vertici di una rete di 1° ordine eseguite col procedimento classico e con le formule della rappresentazione piana di Gauss* (Rivista l'Universo, Firenze I.G.M. 1942); *Trasformazione delle coordinate piane Cassini Soldner degli sviluppi catastali in coordinate conformi di Gauss riferite ai fusi meridiani* (l'Universo, 1944).
- MONCADA G., *La proiezione di Gauss-Boaga nella formazione delle nuove mappe catastali* (Riv. Catasto e SS. TT. EE., anno 1949).
- PAROLI A., *Il problema della trasformazione delle coordinate nella rappresentazione conforme di Gauss e l'unificazione delle reti trigonometriche del Nuovo Catasto* (Rivista del Catasto e SS. TT. EE., anno 1943); *Per una carta topografica in grande scala per l'intero territorio del Regno* (idem, 1941); *Sul calcolo numerico delle coordinate rettilinee e delle coordinate geografiche nel sistema di proiezione conforme di Gauss-Boaga* (idem, 1947); *La rete trigonometrica italiana e la sua unificazione* (idem, 1955).
- PERICOLI A., *Un monogramma per le riduzioni alla corda sul piano di Gauss-Boaga* (Boll. Geod. dell'I.G.M., anno 1952).
- PIZZETTI P., *Trattato di geodesia teoretica*. Bologna 1928.
- SCHREIBER O., *Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung* (Halmschue Hofbuchhandlung, Hannover 1866);
- TARDI P., *Etude d'un système de projection de Gauss en fuseaux de 6° d'amplitude, et avant s'appliquer à l'ensemble du continent africain* (Travaux de l'Ass. de Géodésie de l'U.G.G.I., Paris 1938).
- TROMBETTI C., *La trasformazione delle coordinate gaussiane per il cambio di parametro dell'ellissoide di riferimento* (Boll. Geod. dell'I.G.M., anno 1950); *Trasformazione delle coordinate dei punti trigonometrici catastali dai sistemi locali al sistema Gauss-Boaga* (idem, 1955).