IL RIPRISTINO DEI VERTICI TRIGONOMETRICI SCOMPARSI MEDIANTE MISURE DI DISTANZE

Prof. Ing. BARTOLOMEO BONIFACINO

1. – Il problema del ripristino di un punto trigonometrico scomparso non è nuovo dal punto di vista analitico e si trova risolto in una classica Memoria di F. Guarducci (1914), il cui procedimento venne generalizzato da A. Marussi (v. Collezione di testi tecnici dell'Istituto Geografico Militare – 1941).

I dati di cui si dispone sono i valori degli angoli che vennero osservati dal punto scomparso e verso di esso in occasione della sua determinazione. Riosservando, allora, da e verso un punto ausiliario, scelto in prossimità di quello perduto, tutti o solo alcuni di tali angoli, dal confronto delle nuove misure angolari e di quelle originarie si possono ricavare gli elementi di riduzione di quest'ultimo punto rispetto a quello ausiliario. Si perviene ai valori più plausibili degli elementi anzidetti effettuando una compensazione col metodo dei minimi quadrati, in modo cioè che risulti minima la somma dei quadrati degli scostamenti tra gli angoli provvisori, ridotti al nuovo punto che si assume in luogo di quello scomparso, e quelli originari, tenendo conto, naturalmente, dei pesi delle osservazioni nuove ed originarie.

È da sottolineare l'importanza nel campo operativo del problema in parola specialmente quando trattisi di vertici della rete trigometrica di primo ordine; ad essi è collegata, infatti, tale mole di osservazioni e di calcoli che conviene, in linea di massima, anziché abbandonarli e procedere ad una determinazione ex-novo, ricercarne sul terreno la posizione più probabile.

Sono da ricordare, al riguardo, i lavori di sistemazione dei punti trigometrici che l'Istituto Geografico Militare ha affrontato già da alcuni anni, seguendo apposite norme regolamentari sancite dalla Commissione Geodetica Italiana.

Allo stato attuale delle ricerche ed esperienze circa la misura diretta di distanze con l'impiego dei mezzi radioelettrici, sono prevedibili, in un prossimo futuro, nuove possibilità operative che consentiranno di sostituire, alla misura degli angoli, quella diretta dei lati dei triangoli. Tale sostituzione si può prevedere per lunghe distanze ed anche per lati delle reti di triangolazione di primo ordine, nonché, eventualmente, per distanze inferiori. In relazione a tali moderni sistemi di misure, in quanto segue ci si propone di esporre un nuovo procedimento, di assai semplice esecuzione, per il problema anzidetto, del quale verranno conseguentemente a variare le modalità esecutive.

2. – Sia T il punto trigometrico da ripristinare. Nel punto ausiliario S, posto il più possibile in vicinanza della presumibile posizione del vertice scomparso, si effettuino misure di distanze verso vertici trigometrici sicuramente in centro A_i, B_i, che possono essere anche di ordine differente.

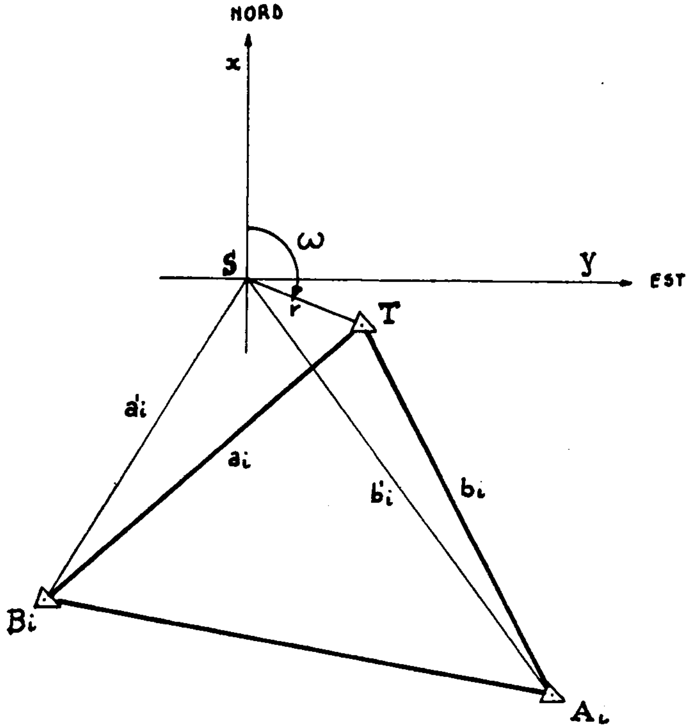

FIG. 1.

Indicando con r, ω, le coordinate polari di T rispetto ad S riferite ad un sistema $S\ (x, y)$ orientato sul reticolato geografico – v. figura – con α_i, β_i gli azimut dei punti di appoggio, A_i, B_i, sul centro ricercato, e con a_i, b_i le loro distanze da esso, avremo:

(1) $$x = r \cos \omega \quad ; \quad y = r \operatorname{sen} \omega$$

e posto, contraddistinguendo con apice le dette distanze dal punto ausiliario:

(2) $$\delta a_i = a'_i - a_i \, ; \qquad \delta b_i = b'_i - b_i$$

sarà:

(3) $$a^2_i = a^2_i + r^2 - 2\, a'_i\, r \cos (\beta_i - \omega)$$

ovvero:

(4) $$(a'_i + a_i)\,(a'_i - a_i) = 2\, a'_i\, r \cos (\beta_i - \omega) - r^2$$

da cui, a meno di quantità d'ordine superiore,

(5) $$\frac{2a'_i}{a'_i + a_i} r \cos(\beta_i - \omega) = \delta a_i$$

e per le (1):

(6) $$\frac{2a'_i}{a'_i + a_i} (x \cos \beta_i + y \operatorname{sen} \beta_i) = \delta a_i .$$

Ad un'espressione analoga si perviene per gli altri lati b_i e b'_i:

(7) $$\frac{2b'_i}{b'_i + b_i} (x \cos \alpha_i + y \operatorname{sen} \alpha_i) = \delta b_i .$$

Indicando con X_{a_i}, Y_{a_i}, X_{b_i}, Y_{b_i} i coefficienti delle incognite si perviene così al sistema:

(8) $$\begin{aligned} X_{a_i} x + Y_{a_i} y &= \delta_{a_i} \\ X_{b_i} x + Y_{b_i} y &= \delta_{b_i} \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

dove le X e Y sono definite dalle:

(9) $$X_{a_i} = \frac{2a'_i}{a'_i + a_i} \cos \beta_i \; ; \qquad Y_{a_i} = \frac{2a'_i}{a'_i + a_i} \operatorname{sen} \beta_i$$

(10) $$X_{b_i} = \frac{2b'_i}{b'_i + b_i} \cos \alpha_i \; ; \qquad Y_{b_i} = \frac{2b'_i}{b'_i + b_i} \operatorname{sen} \alpha_i .$$

Per maggiore semplicità applicativa, stante che l'eccentricità di S rispetto a T è molto piccola relativamente alle distanze SA_i, SB_i si può ritenere nella quasi generalità dei casi, con approssimazione sufficiente:

(11) $$a'_i = a_i \; ; \quad b'_i = b_i$$

e conseguentemente:

(12) $$X_{a_i} = \cos \beta_i \; ; \quad Y_{a_i} = \operatorname{sen} \beta_i$$

(13) $$X_{b_i} = \cos \alpha_i \; ; \quad Y_{b_i} = \operatorname{sen} \alpha_i$$

3. — È da notare che per il calcolo dei coefficienti X_{a_i}, X_{b_i}, Y_{a_i}, Y_{b_i} si richiede la conoscenza degli azimut di A_i, B_i sull'orizzonte di S, mentre dai cataloghi ufficiali della triangolazione sono noti gli azimut di detti punti sull'orizzonte del punto ricercato T; peraltro, dato che S è posto il più possibile in vicinanza del vertice scomparso, la differenza fra gli azimut occorrenti in S e quelli noti in T sarà generalmente del tutto trascurabile.

È altresì da osservare che le equazioni (8) richiedono che le differenze δa_i e δb_i siano sempre costruite nel senso lato nuovo, cioè riferito al punto prossimo, meno lato originario, cioè relativo al vertice trigonometrico scomparso.

Il nuovo procedimento mediante sole misure lineari si presenta, come si vede, assai semplice sia nelle modalità operative che nelle operazioni di calcolo, non essendovi alcuna difficoltà a determinare i valori compensati delle coordinate x ed y del punto T.

In generale, le equazioni del sistema (8) avranno pesi differenti per cui occorrerà ridurle previamente allo stesso peso. Si passerà poi alla risoluzione del sistema normale, i cui coefficienti e termini noti si costruiranno nel modo noto con quelli del sistema (8): indicando con D^{-1} e A_{-1} rispettivamente la matrice reciproca e la trasposta della matrice dei coefficienti del sistema generato, ovviamente si avrà:

$$\left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} = - D^{-1} A_{-1} \left\{ \begin{matrix} \delta a_i \\ \delta b_i \end{matrix} \right\} \tag{14}$$

e l'errore medio dell'unità di peso sarà espresso dalla:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-2}} \tag{15}$$

con v i valori più plausibili dei residui ottenuti introducendo nel sistema generato i valori compensati delle incognite. Per gli errori medi di queste si avrà notoriamente:

$$m_x = \pm\, m_0 \sqrt{\alpha_{1.1}}\;; \quad m_y = \pm\, m_0 \sqrt{\alpha_{2.2}} \tag{16}$$

con $\alpha_{1.1}$, $\alpha_{2.2}$ i termini della diagonale principale della D^{-1}.

BIBLIOGRAFIA

F. Giarducci: *Sul ripristinamento del centro trigonometrico di 1° ordine sul nuovo campanile di S. Marco di Venezia.* Collezione delle Memorie della R. Commissione Geodetica Italiana. Tipografia Gamberini Parmeggiani, 1914.

A. Marussi: *Sul ripristino di un punto trigometrico scomparso.* « L'universo », n. 8, 1938.

B. Bonifacino: *Sul ripristino del punto geodetico S. Salvatore delle rete fondamentale.* « L'Universo », n. 2, 1941.

A. Marussi: *Risoluzione grafica del problema del ripristino di un punto trigometrico scomparso.* « L'Universo », n. 6, 1943.

B. Bonifacino: *Sulla soluzione grafica del ripristino di un punto trigometrico.* « L'Universo », n. 1, 1944.

G. Boaga: *Sulla ricerca delle posizioni dei vertici trigonometrici scomparsi.* « Bollettino S.I.F.E.T. », n. 1, 1955.

B. Bonifacino: *Ripristino contemporaneo di due trigonometrici contigui scomparsi.* Comunicazione al V Convegno Nazionale della Società Italiana di Fotogrammetria e Topografia. « Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali », n. 1, 1957.