

APPLICAZIONI DI ANALISI STATISTICA NELL'ESAME QUALITATIVO DEGLI STRUMENTI A CERCHIO GRADUATO

Dott. Ing. MARIO FONDELLI
Università degli Studi di Firenze

*Comunicazione presentata al X Convegno nazionale della Società Italiana
di Fotogrammetria e Topografia
(Varese, Aprile 1965)*

1. La scelta di uno strumento di misura è generalmente affidata, in una corretta prassi operativa, alla valutazione delle sue possibilità d'impiego ed alla preventiva nozione dell'approssimazione di misura che risulta capace di assicurare.

Questa buona norma di carattere generale risulta essenziale in Geodesia ed in Topografia ove, una volta stabilita la precisione da conseguire in un determinato lavoro od in una particolare misura, appare univocamente stabilita anche la gamma dei mezzi strumentali atti a garantirla.

Logicamente, il preventivo accertamento delle caratteristiche intrinseche di uno strumento viene comunemente affidato all'esperienza mediante un preliminare esame qualitativo dello strumento medesimo. Quest'esame, nel caso dei moderni strumenti di misura angolare, verte essenzialmente nella verifica della bontà di graduazione del cerchio orizzontale.

Il procedimento impiegato per l'esame sperimentale dei cerchi azimutali degli strumenti geodetici destinati ai lavori di Astronomia è nella generalità dei casi quello suggerito dal Prof. H. J. Heuvelink nel 1913 [1]. Questo procedimento risulta nel suo complesso di lunga e laboriosa applicazione, ma consente tuttavia una valutazione molto accurata dell'errore di graduazione del cerchio considerato, che viene addirittura scomposto nelle sue due componenti fondamentali accidentale e periodica.

Gli strumenti impiegati nei lavori geodetici e topografici, i *teodoliti* ed i *tacheometri*, non vengono di regola sottoposti ad alcun esame preventivo né tanto meno ad alcuna determinazione dell'errore di graduazione del relativo cerchio azimutale. Quest'ultima viene ritenuta infatti del tutto superflua, dato che i metodi di misura adottati nella corrente prassi operativa attribuiscono a quest'errore un carattere preminentemente aleatorio e gli effetti sistematici di tipo periodico tendono ad eliminarsi nella media generale delle misure.

È comunque evidente che la miglior utilizzazione di uno strumento a cerchio graduato non può prescindere, anche in questo genere di lavori, da un preventivo esame della sua qualità che, oltretutto, diviene indispensabile specialmente in sede di collaudo o di accettazione dello strumento medesimo. Scopo di quest'esame rimane, naturalmente, la definizione dei limiti di applicabilità dello strumento, in riferimento alle prestazioni che gli sono attribuite o che gli possono essere richieste.

Senza fare immediato ricorso all'applicazione del metodo dell'Heuvelink si può tuttavia ottenere una prima indicazione della qualità della graduazione strumentale attraverso l'analisi statistica di opportune serie di misure angolari. I metodi statistici possono consentire infatti di raccogliere, anche in questo campo, nella maniera più semplice e più immediata, interessanti informazioni sulle qualità strumentali indagate, con evidente vantaggio per l'economia generale della ricerca sperimentale.

2. Com'è noto, le diverse cause di errore influenti nella misura di un angolo sono da ascrivere, in particolar modo, ad una collimazione difettosa, ad una imperfetta lettura dei cerchi graduati, alla eventuale mancanza di rigidità dello strumento ed agli inevitabili difetti di graduazione del cerchio e del micrometro.

Lo studio approfondito di queste cause di errore suddivide i diversi errori che ne risultano in due distinti gruppi principali: quello cui appartengono gli errori di collimazione, di lettura e di non rigidità, e quello cui appartengono invece gli errori di graduazione del cerchio e del micrometro. Mentre il primo gruppo congloba gli errori di carattere accidentale, il secondo raccoglie invece gli errori di carattere periodico o regolare.

Considerato che nella misura di un angolo qualunque i diversi errori si sommano, è naturalmente lecito inferire che le loro differenti caratteristiche abbiano un ruolo determinante nella fluttuazione dei risultati di misura, ottenuti in una opportuna serie di osservazioni, e che l'eventuale predominanza di un gruppo di errori rispetto all'altro influisca sulla distribuzione di frequenza relativa alle osservazioni compiute e sul valore dello scarto quadratico medio risultante.

Logicamente, nota la distribuzione di frequenza delle osservazioni compiute e calcolato lo scarto quadratico medio relativo, l'analisi statistica potrebbe consentire allora di valutare l'adattamento della distribuzione sperimentale all'ipotesi gaussiana che regola — com'è noto — la propagazione degli errori con carattere accidentale. Ovviamente, il grado di adattamento rilevabile nell'analisi di frequenza, mediante l'indice χ^2 , costituirebbe in tal caso un importante indizio della qualità controllata e consentirebbe, nel contempo, di utilizzare in maniera più conveniente lo strumento soggetto all'esame.

È stato però, già da tempo, messo in evidenza che gli errori di osservazione in strumenti a cerchio graduato presentano una distribuzione di frequenza propria [2], e che gli scarti quadratici medi ottenuti nella misura di un angolo non risultano indipendenti dalla sua ampiezza [3].

La ricerca del grado di adattamento della distribuzione sperimentale all'ipotesi teorica, riconducibile a quella messa in evidenza da C. V. L. Charlier, F. Y. Edgeworth e H. Cramér come estensione asintotica della distribuzione normale [4], perde pertanto il significato che potrebbe esserle attribuito.

Tuttavia, ricordando in particolare che le cause di errore classificate nel secondo gruppo — quello degli errori sistematici o regolari — hanno per effetto un addensamento od una rarefazione dei vari tratti di divisione del cerchio in determinate e ricorrenti zone della graduazione, l'applicazione dell'indagine statistica sembra poter fornire preziose informazioni nel ricercare se la varianza fra i valori medi corrispondenti alla misura di un angolo, nelle varie zone della graduazione,

possa fornire un indizio dell'esistenza o meno di effetti diversi nelle zone medesime. Naturalmente, com'è nella prassi statistica, la significatività della prova dovrà essere anche qui interpretata con riferimento all'ipotesi nulla.

L'applicazione dell'*analisi della varianza*, nell'esame degli strumenti a cerchio graduato, offre senza dubbio un contributo notevole alla valutazione della loro qualità. Oltretutto, essa può consentire infatti di mettere in evidenza l'opportunità di sottoporre gli strumenti studiati ad una più approfondita ricerca dei rispettivi errori di graduazione, o ad un più attento e circoscritto impiego.

3. Senza entrare in merito ai fondamenti teorici del metodo di analisi in argomento, illustrati nella letteratura specializzata [5], si noterà comunque che il procedimento operativo applicato al caso esaminato, allorché si desidera evidenziare gli effetti degli errori periodici o regolari, comporta ovviamente la misura di un *angolo campione* α , mediante una opportuna serie di osservazioni che replichi diverse volte l'esplorazione della graduazione azimutale in un certo numero di zone prescelte.

Misurato così, a tal fine, l'angolo campione α , un numero n di volte in ciascuna delle prescelte r zone del cerchio, si potrà con gli r gruppi di n valori x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, r$ ed $j = 1, 2, \dots, n$) formare il quadro

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1n} & x_1 \\
 x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2n} & x_2 \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 x_{r1} & x_{r2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{rn} & x_r \\
 & & & & & & & x_m
 \end{array}$$

dal quale, sussistendo le condizioni previste per la validità del metodo [5], potranno poi esser agevolmente tratti, una volta calcolati i valori medi x_i ed x_m , gli elementi della tabella seguente:

<i>Variazioni</i>	<i>Somme dei quadrati</i>	<i>Gradi di libertà</i>	<i>Valori medi quadratici</i>
Tra i gruppi	$Q_1 = n \sum_{i=1}^r (x_i - x_m)^2$	$r - 1$	$S^2_1 = \frac{Q_1}{r-1}$
Entro i gruppi	$Q_2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_i)^2$	$nr - r$	$S^2_2 = \frac{Q_2}{nr-r}$
Totale	$Q = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_m)^2$	$nr - 1$	$S^2 = \frac{Q}{nr-1}$

che permettono di trovare il rapporto $\frac{S_1^2}{S_2^2} = F$ e la varianza totale S^2 corrispon-

dente alla misura dell'angolo campione α .

Com'è noto, il rapporto S_1^2/S_2^2 ha una *distribuzione di Fischer* con $r-1$ gradi di libertà al numeratore ed $nr-r$ gradi di libertà al denominatore. Calcolato il valore di F e stabilito un certo livello $p/100$ di significatività, il confronto di F con il valore F_p fornito dalle tavole in corrispondenza del livello percentuale predetto e dei gradi di libertà sopra menzionati da la stima dell'accettabilità o meno dell'ipotesi nulla.

Se l'ipotesi della non esistenza degli effetti nelle varie zone della graduazione corrispondesse ai fatti, il valore di F dovrebbe approssimativamente risultare uguale all'unità. La non ammissibilità dell'ipotesi nulla risulterebbe allora rivelata da valori di F molto maggiori dell'unità; riflettendo insieme all'effetto causale anche quello sistematico degli errori di graduazione nelle diverse zone del cerchio, il numeratore del rapporto che definisce F sarebbe infatti più grande del denominatore.

Nell'intento di approfondire le possibilità per un'applicazione pratica del procedimento di analisi statistica predetto, si è utilizzata a tal fine una speciale serie di osservazioni angolari realizzata, già da tempo, con un teodolite Kern DKM 3 (N. 49306).

Stabilite, pertanto, 18 diverse zone del cerchio, si sono cumulate per ciascuna di esse 8 diverse misure di un angolo campione α dell'ampiezza di $45^\circ + x_{ij}$ ".

Nella Tavola 1 sono state riportate per ciascuna di queste misure le medie ottenute nelle osservazioni coniugate. Le osservazioni medesime, compiute con la massima cura, sono state eseguite secondo la prassi operativa normale approssimando le letture con la stima dei cinque centesimi di secondo sessagesimale ($0'',05$).

TAVOLA 1

DKM 3 N. 49306

$$\alpha = 45^\circ + x''_{ij}$$

Zone del cerchio	i j		$\alpha = 45^\circ + x''_{ij}$															
	i	j	1	2	3	4	5	6	7	8	Medie							
0°—5°	1		26.275	25.700	25.475	25.075	25.125	25.250	25.875	25.150	25.491							
10°—15°	2		26.275	25.575	25.400	25.375	25.950	25.475	25.000	25.125	25.522							
20°—25°	3		25.775	26.075	25.650	25.275	25.800	26.175	25.775	25.400	25.741							
30°—35°	4		26.425	25.600	25.600	25.325	24.900	24.700	25.900	24.800	25.406							
40°—45°	5		25.350	25.775	24.875	25.725	25.725	25.875	25.125	24.975	25.428							
50°—55°	6		26.450	25.675	25.550	26.025	26.350	25.075	25.425	25.525	25.759							
60°—65°	7		25.450	24.950	25.425	25.200	25.775	25.200	25.200	25.650	25.356							
70°—75°	8		26.225	25.750	25.550	25.400	25.550	25.600	25.225	25.425	25.591							
80°—85°	9		24.825	26.100	25.275	25.375	25.975	26.000	25.300	25.150	25.500							
90°—95°	10		25.600	26.275	24.850	24.825	25.275	24.900	25.475	25.475	25.334							
100°—105°	11		25.325	25.325	25.150	25.250	25.525	26.175	25.300	25.375	25.428							
110°—115°	12		24.900	25.625	25.325	25.400	25.425	25.375	25.325	25.825	25.400							
120°—125°	13		24.750	26.075	25.575	25.250	25.700	25.725	24.625	25.600	25.412							
130°—135°	14		26.475	24.550	25.150	25.250	25.800	25.525	25.300	24.925	25.372							
140°—145°	15		24.600	25.950	25.225	25.750	25.225	25.050	25.050	25.325	25.272							
150°—155°	16		26.500	26.275	25.125	25.300	25.150	24.950	25.275	25.225	25.475							
160°—165°	17		24.775	25.950	25.350	25.425	26.200	26.375	25.475	25.200	25.594							
170°—175°	18		26.325	25.950	25.500	25.425	25.250	25.200	25.275	24.900	25.478							

$x_m = 25.476$

Calcolate le medie dei valori ottenuti nelle diverse zone e ricavato il valore medio generale, si è proceduto alla determinazione dei valori riassunti nella Tavola 2 che segue:

TAVOLA 2

<i>Variazioni</i>	<i>Somme dei quadrati</i>	<i>Gradi di libertà</i>	<i>Valori medi quadratici</i>
Tra i gruppi	$Q_1 = 2,294\ 088$	17	$S^2_1 = 0,134\ 946$
Entro i gruppi	$Q_2 = 24,914\ 354$	126	$S^2_2 = 0,197\ 733$
Totale	$Q = 27,363\ 119$	143	$S^2 = 0,191\ 350$

Da essa si è ricavato quindi il valore del rapporto F che è risultato pari a 0,68 ed è stato infine confrontato, per i gradi di libertà sopra indicati, con quelli forniti dalle tavole per F_5 ed F_1 , rispettivamente uguali a 1,78 ed a 2,17 [6]. Confrontando questi valori, non può ovviamente escludersi l'ipotesi nulla.

È evidente, come del resto era stato già provato per altra via [7], che nello strumento esaminato l'influenza degli errori periodici di graduazione risulta notevolmente ridotta rispetto a quella degli errori accidentali di misura. Merito, questo, anche del sistema di graduazione a doppio cerchio adottato dalla Kern & Cie S.A. per tale tipo di strumento.

Naturalmente, l'introduzione dell'analisi della varianza nell'esame qualitativo degli strumenti a cerchio graduato dovrà subire, rispetto all'esempio sopra illustrato, ulteriori perfezionamenti, specialmente per quanto concerne la prassi operativa. L'applicazione più logica di questo metodo d'indagine dovrebbe, infatti, comportare la misura di un angolo campione avente un'ampiezza inferiore a quella dell'intervallo corrispondente alla suddivisione in zone della graduazione, con un numero di repliche leggermente superiore a quello sopra considerato. Prescelto così ad esempio, un intervallo della graduazione pari a 15° , l'ampiezza dell'angolo campione α dovrebbe aggirarsi sui $7 \div 8^\circ$, mentre il numero delle repliche dovrebbe essere almeno equivalente alle $12 \div 15$ volte.

È evidente, concludendo, che una più approfondita esperienza nell'applicazione dell'analisi della varianza a questo suggestivo campo della sperimentazione geodetica e topografica, potrebbe infine suggerire l'opportunità di allargare le ricerche ad un maggior numero di fattori, influenti nelle osservazioni angolari, predisponendo allo scopo una più attenta prassi operativa capace di evidenziarne adeguatamente gli effetti.