ERRORI DI FUNZIONI DI GRANDEZZE MISURATE

Dott. Ingg. Antonio Dragonetti e Arutiun Kasangian

1. — PREMESSA

Si tratta del caso più semplice delle osservazioni indirette, quello cioè di una sola grandezza incognita funzione di altre grandezze direttamente misurate. La relazione analitica, che lega la grandezza incognita X alle n grandezze direttamente misurate $X_1, X_2, ..., X_n$ risultano in forma esplicita:

$$X = f(X_1, X_2, ..., X_n). \tag{1}$$

In generale la relazione analitica è di origine teorica ed è accettata senza alcuna discussione sulla sua veridicità. Le grandezze misurate X_i si chiamano determinanti, la grandezza incognita X determinata. Se si vuole che il valore di f risulti definito e calcolabile, occorre che le grandezze X_i siano tutte misurabili in maniera diretta o riducibili a misure dirette.

L'operazione di una misura indiretta può essere suddivisa idealmente in tre fasi: definizione della funzione, misura diretta delle grandezze determinanti, calcolo della misura della grandezza determinata.

2. — VALORE VERO ED ERRORE QUADRATICO DI UNA MISURA INDIRETTA.

Poiché le grandezze X_i sono ottenute direttamente, di solito con misure ripetute e con risultati diversi fra loro, ci si può domandare: quali valori si dovranno assumere per la grandezza X e per il suo errore medio? Si tenga presente che è sempre possibile determinare delle grandezze misurate X_i non solo i valori medi empirici, ma anche i loro errori quadratici medi empirici. Se nella [1] si potessero porre i veri valori delle grandezze misurate X_i, si avrebbe il vero valore della grandezza incognita X. Ma questo non si può fare. Prima di tutto si dovrebbero teoricamente considerare delle grandezze misurate X_i le corrispondenti popolazioni delle misure possibili, introdurre nella [1] tutte le combinazioni possibili dei valori ottenuti dalle n popolazioni e ricavare così la popolazione di tutti i valori possibili della grandezza incognita X, cioè il suo valore medio teorico che coincide con quello vero. Inoltre occorrerebbe che la f sia una relazione lineare nelle X_i.

Poiché delle grandezze misurate X_i si conoscono i valori medi empirici X_{im}, che si possono assumere in luogo dei valori medi teorici e quindi dei valori veri, il valore più probabile della grandezza incognita X risulta:

$$X_m = f(X_{1m}, X_{2m}, ..., X_{nm}). \tag{2}$$

Occorre ora determinare l'errore quadratico medio della misura indiretta, che si indica con m_x. Sviluppando la [1] in serie di Taylor nell'intorno dei valori medi teorici, si ottiene l'espressione:

$$X = f_m + \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)_m dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)_m dx_2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)_m dx_n + R, \tag{3}$$

nella quale i dx_i rappresentano gli errori delle X_i, cioè le differenze fra i valori misurati ed i valori medi teorici, ed R è il resto che contiene tutti i termini di secondo grado e superiore. Poichè gli errori di misura delle determinanti X_i sono di tipo accidentale e quindi così piccoli da poterne trascurare i quadrati e le potenze superiori, nella [3] è possibile trascurare il resto R. Essendo

$$dx = X - f_m \tag{4}$$

l'errore della misura indiretta X, dato che f_m può assimilarsi al valore vero della grandezza incognita, la [3] diventa:

$$dx = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)_m dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)_m dx_2 + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)_m dx_n. \tag{5}$$

Ma delle grandezze misurate X_i si conoscono i valori medi empirici X_{im}, di conseguenza nella [5] le derivate s'intendono calcolate per questi valori ed ai dx si possono sostituire gli scarti o residui v. Si ha

$$v = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)_m v_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)_m v_2 + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)_m v_n, \tag{6}$$

o più semplicemente:

$$v = a\, v_1 + b\, v_2 + \ldots\ldots + z\, v_n, \tag{7}$$

la quale formula esprime l'errore della misura indiretta X in funzione lineare degli errori delle misure dirette X_i.

Il valore quadratico medio di tutti gli scarti v si ottiene ponendo nella [7] tutte le possibili combinazioni degli scarti v_i delle misure dirette. Per definizione esso è dato dalla media dei quadrati di v e risulta:

$$M\,(v^2) = M\,(a\, v_1 + b\, v_2 + \ldots\ldots + z\, v_n)^2. \tag{8}$$

Tenendo conto che $M\,(v^2) = m^2_x$ e sviluppando il quadrato del secondo membro, si ricava:

$$m^2_x = a^2\, M\,(v_1^2) + b^2\, M\,(v_2^2) + \ldots\ldots + z^2\, M\,(v^2_n) + \\ + 2\, a\, b\, M\,(v_1 \cdot v_2) + \ldots\ldots + 2\, a\, z\, M\,(v_1 \cdot v_n) + \ldots.. \tag{9}$$

Dato che gli scarti v_i si possono considerare come appartenenti a variabili casuali indipendenti, sviluppando la media di un prodotto si ha per la proprietà degli scarti:

$$M\,(v_i\, v_j) = M\,(v_i) \cdot M\,(v_j) = o. \tag{10}$$

Quindi, ponendo per definizione

$$M\,(v_1^2) = m^2_{x1}, \ldots\ldots, M\,(v_n^2) = m^2_{xn}, \tag{11}$$

e ricordando l'origine dei coefficienti a, b, ..., z, si ha infine:

$$[12] \qquad m^2_x = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2_m m^2_{x1} + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2_m m^2_{x2} + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)^2_m m^2_{xn}.$$

La [12] è la formula cercata dell'errore quadratico medio della misura indiretta X in funzione degli errori quadratici medi delle grandezze misurate X_i. E' bene ricordare ancora che la [12] è valida soltanto se le grandezze misurate X_i sono indipendenti, cioè affette da errori accidentali. Le derivate parziali, come si è già detto, s'intendono calcolate per i valori medi empirici X_{im}.

3. — ERRORE QUADRATICO MEDIO DI UNA MISURA INDIRETTA IN PRESENZA DI CORRELAZIONI FRA LE MISURE DIRETTE.

Può darsi che alcune grandezze determinanti X_i, misurate nelle stesse condizioni ambientali, non siano assolutamente indipendenti, ma in un certo qual modo correlate. Se sono correlate le grandezze X_i, saranno di conseguenza correlati anche i rispettivi errori quadratici medi m_{xi}. Infatti la correlazione può nascere dal fatto che una medesima caratteristica ambientale influenzi alcune delle grandezze X_i, che sono misurate contemporaneamente. Cioè la popolazione delle misure possibili e quindi degli errori di una grandezza risulterà correlata alla popolazione delle misure possibili e quindi degli errori di un'altra grandezza.

Di conseguenza non è più valida la [10] e nella [9] non è possibile trascurare i doppi prodotti. La correlazione si può considerare di tipo lineare entro il limitato campo di variabilità degli errori, che d'altra parte sono piccoli. Invece della [12] occorre applicare la seguente formula: (1)

$$[13] \qquad m^2_x = a^2 m^2_{x1} + b^2 m^2_{x2} + \ldots\ldots + z^2 m^2_{xn} + 2\,a\,b\,r_{12}\,m_{x1}\,m_{x2} + \\ + \ldots\ldots + 2\,a\,z\,r_{1n}\,m_{x1}\,m_{xn} + \ldots\ldots,$$

nella quale si dovrebbero introdurre i valori veri dei coefficienti di correlazione lineare r_{ij}, se con i ed j si indicano le due generiche grandezze correlate. Invece anche dei coefficienti r_{ij} si hanno soltanto dei valori empirici ed approssimati, che la statistica ci insegna a calcolare con l'ipotesi della correlazione lineare fra le popolazioni delle misure eseguite. Si ottiene:

$$[14] \qquad r_{ij} = \frac{M\,(v_i\,v_j)}{\sigma_i\;\sigma_j},$$

essendo $M\,(v_i\,v_j)$ il valore medio del prodotto degli scarti, σ_i e σ_j le varianze delle grandezze misurate X_i e X_j.

Se alcune delle grandezze determinanti X_i sono a loro volta funzioni di altre grandezze direttamente misurate ed indipendenti, allora il coefficiente di correlazione lineare r_{ij} va calcolato non più con le correlazioni statistiche, ma con quelle di tipo funzionale. Siano X_i ed X_j le grandezze determinanti, a loro volta funzioni delle grandezze direttamente misurate ed indipendenti y_s, e precisamente:

(1) Si consiglia di consultare il libro: M. Cunietti - *Corso teorico e pratico delle misure* - III Ediz. - Edizioni Libreria Cortina - Milano 1964 - pagg. 403 e seguenti.

$$[15] \qquad x_i = f_i\,(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_s, \ldots\ldots) \qquad x_j = f_j\,(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_s, \ldots\ldots).$$

Il coefficiente di correlazione lineare di tipo funzionale è dato dalla formula:

$$[16] \qquad r_{ij} = \frac{a'_i\, a'_j\, m^2_{y1} + b'_i\, b'_j\, m^2_{y2} + \ldots\ldots + s'_i\, s'_j\, m^2_{ys} + \ldots\ldots}{m_{xi}\ m_{xj}}.$$

Nella [16] i coefficienti a'_i, b'_i, ..., s'_i, ... e a'_j, b'_j, ..., s'_j, ... sono le derivate parziali delle funzioni f_i ed f_j rispetto alle grandezze y_s, calcolate per i valori medi empirici delle misure eseguite:

$$[17] \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a'_i = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_1}\right)_m & a'_j = \left(\dfrac{\partial f_j}{\partial y_1}\right)_m \\ b'_i = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_2}\right)_m & b'_j = \left(\dfrac{\partial f_j}{\partial y_2}\right)_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ s'_i = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_s}\right)_m & s'_j = \left(\dfrac{\partial f_j}{\partial y_s}\right)_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Gli altri termini m_{xi} ed m_{xj} sono gli errori quadratici medi delle grandezze determinanti correlate X_i ed X_j, m_{ys} gli errori quadratici medi delle grandezze direttamente misurate ed indipendenti y_s.

4. — PESO DI UNA MISURA INDIRETTA.

In alcuni casi può essere richiesto il peso p della grandezza incognita X in funzione dei pesi p_i delle grandezze determinanti X_i. Si sa che il peso in generale è inversamente proporzionale al quadrato dell'errore medio:

$$[18] \qquad p_i = \frac{m^2_o}{m^2_{xi}},$$

essendo m_o l'errore medio dell'unità di peso, costante cui corrisponde il peso $p_o = 1$. Tenendo conto delle relazioni

$$[19] \qquad m^2_x\, p = m^2_{x1}\, p_1 = m^2_{x2}\, p_2 = \ldots\ldots = m^2_{xn}\, p_n = m^2_0\, p_0 = m^2_0,$$

e della formula [12], si ha:

$$[20] \qquad \frac{m^2_0}{p} = a^2\,\frac{m^2_0}{p_1} + b^2\,\frac{m^2_0}{p_2} + \ldots\ldots + z^2\,\frac{m^2_0}{p_n}.$$

Eliminando nella [20] la costante m^2_o, si ottiene:

$$[21] \qquad \frac{1}{p} = \frac{a^2}{p_1} + \frac{b^2}{p_2} + \ldots + \frac{z^2}{p_n},$$

che è la formula cercata.

Se alcune delle grandezze determinanti X_i non sono fra loro indipendenti, allora occorre tener conto della loro correlazione e si ha la formula:

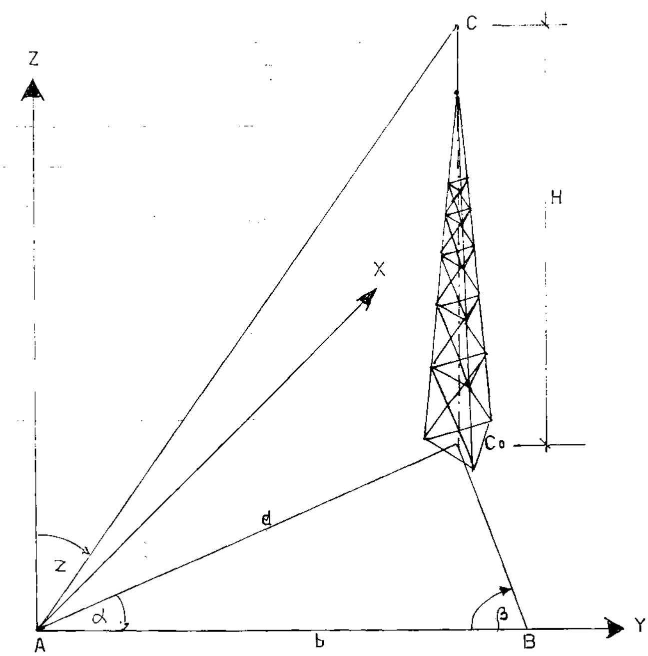
$$[22] \qquad \frac{1}{p} = \frac{a^2}{p_1} + \frac{b^2}{p_2} + \ldots + \frac{z^2}{p_n} + 2\,a\,b\,\frac{r_{12}}{\sqrt{p_1 p_2}} + \ldots,$$

nella quale è noto il significato dei simboli.

5. — ESEMPIO NUMERICO (intersezione in avanti con livellazione tacheometrica).

Si vuole determinare l'altezza H di un'antenna (v. fig. 1). Si fa stazione con un tacheometro reiteratore centesimale sul punto A, si misurano l'angolo azimutale $C_oAB = \alpha$ e l'angolo zenitale z relativo alla sommità C dell'antenna; poi si fa stazione sul punto B e si misura l'angolo azimutale $ABC_o = \beta$; inoltre si misura con un nastro d'acciaio la base AB = b. Le misure hanno dato i seguenti risultati:

Fig. 1



	α	β	z	b
1)	55,752^g	89,958^g	83,516^g	andata
2)	,753	,959	,515	100,21 m
3)	,749	,955	,513	ritorno
4)	,755	,957	,517	100,23 m
5)	,751	,951	,514	

Calcolare il valore più probabile dell'altezza H ed il suo errore quadratico medio m_H, supposto che esista correlazione fra gli angoli azimutali α e β (2).
N.B. Per semplicità si suppone che i vertici A, B e il piede dell'antenna siano sullo stesso piano orizzontale.

Soluzione.

Si calcolano dapprima i valori più probabili e gli errori quadratici medi degli angoli α, β, z e della base b (media aritmetica):

N.	α	v	v^2
1	55,752^g	0	0
2	,753	+1	1
3	,749	—3	9
4	,755	+3	9
5	,751	—1	1
$\alpha_m =$	55,752^g	[v]=0	[v^2] = 20

N.	β	v	v^2
1	89,958^g	+2	4
2	,959	+3	9
3	,955	—1	1
4	,957	+1	1
5	,957	—5	25
$\beta_m =$	89,956^g	[v]=0	[v^2]=40

N.	z	v	v^2
1	83,516^g	+1	1
2	,515	0	0
3	,513	—2	4
4	,517	+2	4
5	,514	—1	1
$z_m =$	83,515^g	[v] = 0	[v^2]=10

$$m\alpha = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{20}{4}} = \pm 2{,}24^g \cdot 10^{-3}$$

(2) Si consiglia di consultare il libro: A. Dragonetti - *Esercizi di Topografia* - Edizioni Libreria Cortina - Milano 1957.

$$m\beta = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{40}{4}} = \pm 3{,}16^g \cdot 10^{-3}$$

$$m_z = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{10}{4}} = \pm 1{,}58^g \cdot 10^{-3}$$

$$m\alpha_m = \frac{m\alpha}{\sqrt{n}} = \pm \frac{2{,}24 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{5}} = \pm 1^g \cdot 10^{-3}$$

$$m\beta_m = \frac{m\beta}{\sqrt{n}} = \pm \frac{3{,}16 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{5}} = \pm 1{,}41^g \cdot 10^{-3}$$

$$m_{z_m} = \frac{m_z}{\sqrt{n}} = \pm \frac{1{,}58 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{5}} = \pm 0{,}71^g \cdot 10^{-3} \qquad b_m = 100{,}22 \text{ m}$$

$$m_{b_m} = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n\,(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{(-1)^2+(1)}{2 \times 1}} = \pm 1 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 0{,}01 \text{ m.}$$

Con riferimento alla fig. 1 si hanno le formule:

$$d = \frac{b \text{ sen } \beta}{\text{sen}\,(\alpha+\beta)} \qquad H = d \text{ ctg } z \qquad d = 131{,}42 \text{ m}$$

$$H = 34{,}813 \text{ m.} \qquad \alpha + \beta = 145{,}708^g.$$

Il valore più probabile dell'altezza dell'antenna risulta quindi: $H_m = 34{,}813$ m.
Per calcolare l'errore quadratico medio m_H si applicano le formule [13] e [14]. Si ha, tenendo presente che gli errori angolari vanno espressi in radianti:

$$H = \frac{b \text{ sen } \beta \text{ ctg } z}{\text{sen}\,(\alpha+\beta)} \qquad m^2_H = a^2 m^2\alpha_m + b^2 m^2\beta_m + c^2 m^2_{b_m} + d^2 m^2_{z_m} + 2a\,b\,r_{\alpha\beta} \cdot m\alpha_m \cdot m\beta_m$$

$$a = \frac{\partial H}{\partial \alpha} = -H \text{ ctg } (\alpha+\beta) \qquad a = +\ 30{,}41 \qquad a^2 = 924{,}77$$

$$2\,a\,b = +\ 2.186{,}48$$

$$b = \frac{\partial H}{\partial \beta} = \frac{H \text{ sen } \alpha}{\text{sen } \beta \text{ sen } (\alpha+\beta)} \qquad b = +\ 35{,}95 \qquad b^2 = 1.292{,}40$$

$$c = \frac{\partial H}{\partial b} = \frac{H}{b} \qquad c = +\ 0{,}35 \qquad c^2 = 0{,}12$$

$$d = \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{H}{\operatorname{sen} z \cos z} \qquad d = +140{,}64 \qquad d^2 = 19.779{,}21$$

$$M(v\alpha\ v\beta) = \frac{0 \times 2 + 1 \times 3 + (-3)(-1) + 3 \times 1 + (-1)(-5)}{5} =$$

$$= \frac{3+3+3+5}{5} = \frac{14}{5} = 2{,}8$$

$$\sigma^2\alpha = \frac{[v\alpha^2]}{n} = \frac{20}{5} = 4 \qquad \sigma\alpha = 2$$

$$r\alpha\beta = \frac{M(v\alpha\, v\beta)}{\sigma\alpha \cdot \sigma\beta} = \frac{2{,}8}{2 \times 2{,}83} = \frac{2{,}8}{5{,}66} = 0{,}495$$

$$\sigma^2\beta = \frac{[v\beta^2]}{n} = \frac{40}{5} = 8 \qquad \sigma\beta = 2{,}83$$

$$m_H^2 = 924{,}77\,(0{,}001 \text{x} 0{,}0157)^2 + 1292{,}40\,(0{,}00141 \text{x} 0{,}0157)^2 +$$

$$+ 0{,}12 \text{x} 0{,}01^2 + 19.779{,}21\,(0{,}00071 \text{x} 0{,}0157)^2 + 2.186{,}48 \text{x} 0{,}495\,(0{,}001 \text{x} 0{,}0157)\,(0{,}00141 \text{x} 0{,}0157) =$$

$$= 0{,}2282 \text{x} 10^{-6} + 0{,}6378 \text{x} 10^{-6} + 12 \text{x} 10^{-6} + 2{,}4602 \text{x} 10^{-6} + 0{,}3777 \text{x} 10^{-6} =$$

$$= 15{,}7039 \text{x} 10^{-6}\ m^2$$

$$m_H = \pm 3{,}96 \text{x} 10^{-3} = \pm 0{,}00396\ m.$$

L'errore quadratico medio dell'antenna risulta: $m_H = \pm 0{,}004$ m. Quindi l'altezza dell'antenna si scrive:

$$H = 34{,}813 \pm 0{,}004\ m.$$

Il vero valore di H, secondo il calcolo delle probabilità, risulta compreso fra 34,813 — 0,004x3 e 34,813 + 0,004 x 3, cioé fra 34,801 e 34,825 m.