RELAZIONI FRA COORDINATE CARTESIANE SPAZIALI E COORDINATE GEOGRAFICHE (Inversione del Sistema)

*Marco Unguendoli**

RIASSUNTO: *Si espone un metodo semplice di inversione del sistema che lega le coordinate cartesiane spaziali di un punto alle coordinate geografiche ed all'altezza sull'ellissoide dello stesso.*

1) - Come è noto le relazioni che legano le coordinate geografiche e l'altezza di un punto alle coordinate cartesiane in un sistema spaziale avente l'asse z coincidente con l'asse di rivoluzione dell'elissoide di riferimento, il piano xy sul piano equatoriale e l'asse x rivolto verso il meridiano da cui si contano le longetudini, sono:

$$\left\{\begin{aligned} x &= (N + H) \cos \varphi \cos \omega \\ y &= (N + H) \cos \varphi \operatorname{sen} \omega \\ z &= [N(1 - e^2) + H] \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}\right. \tag{1}$$

e per l'inversione di tale sistema alcuni autori [1], [2] indicano metodi basati sulle approssimazioni successive. Si espone qui un metodo diretto basato sulla soluzione di una equazione di quarto grado, soluzione che non presenta difficoltà avendo a disposizione un calcolatore.

2) - Il sistema (1) può essere scritto:

$$\left\{\begin{aligned} x &= N \cos \varphi \cos \omega + H \cos \varphi \cos \omega \\ y &= N \cos \varphi \operatorname{sen} \omega + H \cos \varphi \operatorname{sen} \omega \\ z &= N(1-e^2) \operatorname{sen} \varphi + H \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Introduciamo la latitudine ridotta u ricordando che:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \sqrt{1-e^2 \cos^2 u}$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{1-e^2} \cos u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}$$

* Università di Ancona - Università di Bologna.

ottenendo:

$$\begin{cases} x = \left(a \cos u + \dfrac{H \sqrt{1-e^2} \cos u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}\right) \cos \omega \\ y = \left(a \cos u + \dfrac{H \sqrt{1-e^2} \cos u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}\right) \operatorname{sen} \omega \\ z = \left(a \sqrt{1-e^2} + \dfrac{H}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}\right) \operatorname{sen} u \end{cases} \tag{3}$$

Dalle prime due equazioni dei sistemi (1) o (3) si ha immediatamente

$$\omega = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \tag{4}$$

Noto ω una delle prime due equazioni del sistema (3) per esempio la seconda diviene:

$$\frac{y}{\operatorname{sen} \omega} = y_1 = a \cos u + \frac{H \sqrt{1-e^2} \cos u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}$$

da cui si ha:

$$H = (y_1 - a \cos u) \frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}{\sqrt{1-e^2} \cos u} \tag{5}$$

che sostituita nella terza equazione di (3) dà:

$$z = a \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} u + (y_1 - a \cos u) \frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}{\sqrt{1-e^2} \cos u} \cdot$$

$$\cdot \frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}$$

che con semplici passaggi si riduce a:

$$a e^2 \operatorname{sen} u \cos u - y_1 \operatorname{sen} u + z \sqrt{1-e^2} \cos u = 0 \tag{6}$$

Ponendo $t = \mathrm{tg}\,\frac{u}{2}$ da cui si ha:

$$\mathrm{sen}\,u = \frac{2\,t}{1 + t^2} \qquad\qquad \cos u = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

la (6) diviene:

$$a\,e^2\,\frac{2\,t\,(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2} - y_1\,\frac{2\,t}{1 + t^2} + z\,\sqrt{1 - e^2}\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = 0$$

che opportunamente ridotta dà:

$$t^4 + A\,t^3 + C\,t - 1 = 0 \tag{7}$$

in cui:

$$A = \frac{2(a\,e^2 + y_1)}{z\,\sqrt{1 - e^2}}\,; \qquad\qquad C = \frac{2(y_1 - a\,e^2)}{z\,\sqrt{1 - e^2}}$$

La soluzione della (7) dà luogo normalmente a due radici reali che però non ingenerano confusione.

Trovato il valore di u si ha immediatamente:

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,u}{\sqrt{1 - e^2}} \tag{8}$$

ed infine dalla (5) si ricava H.

3) - A titolo di esempio riportiamo un calcolo eseguito con il calcolatore da tavolo (H.P. 9810 A).

I dati iniziali sono:

$\varphi = 45°\ 00'\ 00'',0000$ $\qquad\qquad$ $\omega = 12°\ 00'\ 00'',0000$

$H = 3000$ m

$$a = 6378388{,}00$$
$$b = 6356911{,}95$$
$$e^2 = 0{,}00672267$$

Si ha immediatamente:

$$N = 6389135{,}05 \text{ m.}$$

$$N+H = 6392135{,}05 \text{ m.}$$

$$\begin{cases} x = 4421150{,}900 \text{ m.} \\ y = 939744{,}633 \text{ m.} \\ z = 4489550{,}358 \text{ m.} \end{cases}$$

Assumendo ora come dati iniziali x, y, z passiamo all'inversione del sistema. Con la (4) si ha:

$$\mathrm{tg}\,\omega = 0{,}2125565616$$
$$\omega = 12^\circ\ 00'\ 00'',00001 \qquad \Delta\omega = +\ 0'',00001$$

si ha quindi:

$$y_1 = \frac{y}{\mathrm{sen}\,\omega} = 4519922{,}041 \text{ m.}$$

I coefficienti della (7) saranno inoltre:

$$A = 2{,}039498988 \qquad c = 2{,}001165830$$

La soluzione dell'equazione dà:

$$t_1 = 0{,}4132260727$$
$$t_2 = -\ 2{,}4432841490$$

con il valore di t_1 si ottiene:

$$u = 44^\circ,90337992$$

da cui con la (8) si ricava:

$$\varphi = 45^\circ\ 00'\ 00'',0001 \qquad \Delta\varphi = 0'',0001$$

ed infine con la (5):

$$H = 3000{,}001 \text{ m.} \qquad \Delta H = 0{,}001 \text{ m.}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BOMFORD: *Geodesy* - Third Edition, Clarendon Press, Oxford, 1971.
[2] J.J. LEVALLOIS: *Geodesie Generale* - Tome 2, I.G.N., Eyrolles, Paris, 1970.
[3] N. JADANZA: *Elementi di Geodesia* - Torino, 1895.
[4] M.K. PAUL: *A note on computation of geodetic coordinates from geocentric (cartesian coordinates* - Bulletin Géodésique N. 8, 1973.

SOCIETA' AEROFOTOGRAFIE E RILEVAMENTI AEROFOTOGRAMMETRICI

S.A.R.A. S.p.A.

00146 ROMA - VIA ODERISI DA GUBBIO 101

TELEGRAMMI: SARANISTRI - TEL. 555708 - 553643

aerofotogrammetria

dal 1921